Alkalmazott Matematikai Lapok **41** (2024), 1–23.
DOI: xxx

FOLYTONOS ÁLTALÁNOSÍTOTT JÁTÉKOK

BALOG IMRE ÉS PINTÉR MIKLÓS

Cikkünkben véges sztochasztikus játékokkal foglalkozunk. Az alapfogalmak bevezetése és egy rövid matematikai áttekintés után a véges sztochasztikus játékok egyensúlyának létezését vizsgáljuk.

Célunk, hogy egy új fogalom – a folytonos általánosított játék – segítségével egy, a korábbiaktól eltérő bizonyítást adjunk a véges általánosított diszkontált sztochasztikus játékok egyensúlyának létezésére. Bizonyításunkban megmutatjuk, hogy minden említett sztochasztikus játék ún. folytonos általánosított játék. A folytonos általánosított játékokról pedig megmutatjuk, hogy van egyensúlyuk.

Továbbá, az egyik klasszikus sztochasztikus játék, a Big Match példáján keresztül szemléltetjük, hogy amennyiben a játékosok kifizetései az általánosított diszkontálás helyett a hosszú távú átlagos kifizetéssel adottak, akkor a véges sztochasztikus játék már nem feltétlenül tartozik a folytonos általánosított játékok osztályába, sőt a Big Match esetében jól ismerten, nincs egyensúlya sem.

1. Bevezetés

A sztochasztikus játék [25] egy olyan matematikai modell, ami több szereplő több időszakon keresztüli viselkedését írja le dinamikusan változó döntési környezetben. Shapley röviden úgy írta le a sztochasztikus játékot, mint ami pozícióról pozícióra halad előre egy olyan átmenetszabály szerint, amelyet (az adott pozíció és) a játékosok cselekedetei kontrollálnak. Shapley nyelvezetében tehát a pozíció nem más, mint az az állapot, amelyben a játékosok döntenek. A sztochasztikus játék dinamikus jellege pedig vonzó tulajdonságnak bizonyult a későbbiekben a különféle alkalmazási lehetőségek tekintetében, például: fegyverkezési verseny [37], adózás [24] vagy halászati háborúk [15].

Egy sztochasztikus játékra tekinthetünk tehát úgy, mint ami kiterjeszti a von Neumann [35] által bevezetett játékok osztályát, hiszen a sztochasztikus játék több időszakon ível át. Emellett általánosítja a Blackwell [3] által elsőként vizsgált Markov-döntési problémákat (MDP), hiszen több játékos szerepel benne.

A fenti két általánosítás miatt úgy tűnik, hogy a sztochasztikus játék egy összetett fogalom. Ezt támasztja alá az is, hogy a sztochasztikus játékokban a játékosoknak két, akár egymással szemben álló célja van. Először is természetesen minden játékos döntését befolyásolja, hogy az adott állapotban mi lesz az aktuális kifizetése. Másodszor az adott állapot és az abban meghozott döntései a játékosoknak befolyásolni fogják a jövőbeli kifizetéseket. Emiatt a játékosoknak a döntéshozatalkor mindkét következmény szempontjából kell mérlegelni a lehetőségeket. Habár ez a kettősség megjelenik az MDP-nél is, a sztochasztikus játékoknál nem feltétlenül egyetlen szereplő viselkedését vizsgáljuk, ami bonyolultabbá teszi az elemzést.

Shapley olyan sztochasztikus játékokat elemzett[1], amelyekben az elnyeléseknek pozitív a valószínűsége, azaz a sztochasztikus játék egy adott állapot elérése után abban az állapotban marad örökre.

A sztochasztikus játékok elemzése során fontos szerepet játszik a játéktörténet, amely az állapotok és a hozzá tartozó akcióprofilok rendezett együttese aszerint, hogy a sztochasztikus játékban mi is ment végbe az adott játékkörig. A játéktörténetek segítségével a játékosok stratégiáját is definiálni tudjuk, mégpedig a stratégia írja elő a játékos számára a követendő akciót annak tükrében, hogy mi a játéktörténet.

A zérus összegű játékoknál speciális fogalom a játék értéke. Egy valós szám egy zérus összegű véges sztochasztikus játék értéke, ha

– a sorjátékosnak létezik olyan stratégiája, amely minden esetben biztosítja számára, hogy a sztochasztikus játék során létrejövő várható teljes jutalma nem süllyed az érték alá,

– valamint az oszlopjátékosnak létezik olyan stratégiája, amely minden esetben biztosítja számára, hogy a sztochasztikus játék során létrejövő várható teljes jutalma nem süllyed az érték ellentettje alá.

Shapley [25] megmutatta, hogy egy zérus összegű sztochasztikus játéknak létezik értéke, ha a játékosok diszkontálást használnak (véges diszkontált sztochasztikus játék). Emellett Shapley azt is belátta, hogy a játék értékét karakterizálni is lehet úgy mint egy nemlineáris operátor fixpontja.

A véges nemdiszkontált zérus összegű sztochasztikus játékosztályra Mertens és Neyman [19, 20] eredménye a következő: minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik ε-optimális stratégia.

Shapley [25] másik eredménye – a sztochasztikus játékokat meghatározó paraméterek időfüggetlenségét kihasználva –, hogy az általa vizsgált esetben a játékosoknak létezik olyan optimális stratégiája, amely stacionárius, azaz csak az adott állapottól függ.

[1] Vizsgálata során fontos feltételeket alkalmazott Shapley, amelyeket a cikkben is alkalmazni fogunk: az állapotok, a játékosok és az akciók halmazok végessége. Ezenkívül a játék zérus összegű volt, azaz olyan kétszemélyes sztochasztikus játék, amelyben az első játékos nyeresége a második játékos vesztesége.

A többszemélyes diszkontált sztochasztikus játékok esetében a stacionárius Nash-egyensúly létezését látta be véges sok állapot mellett Fink [6], Takahashi [31], illetve végtelen sok állapot és néhány megszorítás mellett Maitra and Parthasarathy [18]. Azonban a szakirodalomban találhatunk arra példát, hogy általános keretek között a stacionárius Nash-egyensúly létezése egyáltalán nem biztosított, sőt még stacionárius ε-Nash–egyensúly sincs elég kicsi ε értékre [16, 17]. A teljesség igénye nélkül megemlítjük, hogy a diszkontált sztochasztikus játékok stacionárius egyensúlyának létezéséről átfogóbb képet ad Solan [28] és Levy [16].

A sztochasztikus játékok vizsgálatának egy másik lehetséges iránya az úgynevezett egyenletes megoldás módszerének használata, amelyet olyan végtelen hosszú sztochasztikus játékokra alkalmazhatunk, ahol minden körben kapnak a játékosok kifizetést. Ez az eljárás egy végtelen hosszú játékra hosszú távú interakciók modellezési lehetőségeként tekint, ahol szinte semmilyen értéke sincs az időnek (a diszkontfaktor közel van 1-hez) és/vagy a játék kellő mértékben hosszú – és ezek közül egyik sem ismert teljes mértékben. Ekkor az a cél, hogy az eredményként előálló, bizonyos optimalitási tulajdonságokkal rendelkező megoldások ne legyenek érzékenyek a játék időbeli lefolyásának hosszára vagy éppen a diszkontfaktor változására.

Egy zérus összegű sztochasztikus játéknak ν az egyenletes értéke, ha

- a T-hosszúságú játékban átlagolás útján létrejövő ν_T érték konvergál a ν értékhez, midőn T tart a végtelenhez,
- és minden $\varepsilon > 0$ esetén minden játékosnak van olyan stratégiája, ami az összes T-hosszúságú játékban ε-optimális, amennyiben T elég nagy.

Bewley és Kohlberg [2] bebizonyította, hogy minden véges zérus összegű sztochasztikus játékban a ν_T értékek konvergálnak abban az esetben, ha T növekszik. Mertens és Neyman [19, 20] eredménye az, hogy minden véges zérus összegű sztochasztikus játéknak van egyenletes értéke.

A nemzérus összegű játékok szakirodalma természeténél fogva sokkal szerteágazóbb, és ez a terület az utolsó három évtizedben intenzíven kutatott. A játék jellegének eme apró módosítása számos ponton utolérhető, mint például egy egyensúly egyenletes ε-egyensúly, ha egyetlenegy játékos sem tud az egyensúlytól eltérve ε mennyiségnél többet profitálni – feltéve, hogy a játék megfelelően hosszú, vagy a diszkontfaktor közel van 1-hez, és emellett a kifizetési vektor majdnem független a játék hosszától. A témakörben néhány eredmény született az egyenletes ε-egyensúly létezésére: kétszemélyes játék esetén Vieille [33, 34]; háromszemélyes játék esetén Solan [27], ahol az állapot legfeljebb egyszer változik; illetve más sztochasztikus játékokra Solan és Vieille [29], Flesch és mások [8] és Simon [26] cikkei.

A cikkünkben vizsgált sztochasztikus játék diszkrét időben zajlik véges sok állapottal, játékossal és akcióval. Amint már korábban említettük, egy sztochasztikus játékban a játékosoknak két – egymástól nem feltétlenül független – célja van. Az egyik az, hogy a sztochasztikus játékban keletkező hosszú távú kifizetésüket valamilyen szokásos értékelés alapján (például jelenérték számítás) növeljék. A másik cél pedig az, hogy az adott időszakban a kifizetésük legyen minél magasabb. Ez a kettősség teszi a sztochasztikus játékok elemzését érdekessé és nehézzé.

Munkánk célja, hogy a Fink [6], Maitra és Parthasarathy [18] Takahashi [31], eredményekhez hasonló módon, azaz fixponttételt használva, bizonyítsuk, hogy minden véges diszkontált sztochasztikus játéknak (azaz, ahol diszkontált kifizetés van) van Nash-egyensúlya.

Megközelítésünk egy új fogalom, az ún. folytonos általánosított játék, használatára támaszkodik. Egy (folytonos) általánosított játékban a játékosok nem közvetlenül kontrollálják a játék kimeneteleit, hanem egy függvényen keresztül.

Megmutatjuk, hogy minden folytonos általánosított játéknak van Nash-egyensúlya, majd megmutatjuk, hogy minden véges általánosított diszkontált sztochasztikus játék folytonos általánosított játék, azaz van Nash-egyensúlya.

A folytonos kifizetéssel rendelkező játékok irodalma széleskörű, ezért a teljesség igénye nélkül említünk meg néhány releváns eredményt. A relevancia alatt azt értjük, hogy a cikkekben (Fudenberg és Levine [9], Harris [13], Harris, Reni és Robson [14]) szintén a játékmeneteken értelmezett értékfüggvényekkel dolgoznak, mint ahogyan azt mi is tesszük (lásd a 3.3. Definícióban szereplő λ-diszkontált vagy a hosszú távú átlagos kifizetéseket).

Fudenberg és Levine egy olyan diszkrét idejű játékot vizsgált véges sok játékossal, ahol minden időszakban a játékosok véges sok akcióval rendelkeznek. A cikk alapötlete az, hogy az eredeti játékot vágjuk szét az időszakok szerint több (levágott) játékra az alábbi elv szerint: az első játék csak az első időszakot, a második játék az első két időszakot, ..., a t-edik játék az első t időszakot öleli fel és így tovább. Amennyiben az eredeti játékban a kifizetés egyenletesen folytonos, akkor a (T időszakig) levágott játékok részjáték tökéletes ε^T-egyensúlyainak halmaza konvergál az eredeti játék részjáték tökéletes egyensúlyainak halmazához, ha $T \to \infty$ és $\varepsilon^T \to 0$. Speciálisan a cikk egy „pusztán” topológiai megfontolásokon alapú bizonyítást ad ismételt játékok egyensúlyának létezésre λ-diszkontált kifizetés mellett – a szokásos Banach–féle fixponttételen alapuló bizonyításokhoz képest (például [25] vagy [6]). Megjegyezzük, hogy a [9] cikkben találhatunk néhány eredményt arra az esetre is, amikor az akcióterek végességét nem írjuk elő. Azonban az alkalmazott módszer és annak minden eredménye nem általánosítható az akcióterek végességének elhagyásával [12].

Harris egy hasonló diszkrét idejű játékot vizsgált szintén véges sok játékossal. Amennyiben feltesszük, hogy 1) a lehetséges történetek halmaza zárt részhalmaza az összes kimenetel halmazának, 2) minden játékos kifizetése – mint a kifizetés-sorozatok függvénye – folytonos, 3) az akcióterek minden időszakban kompakt Hausdorff-terek minden játékosra, valamint 4) a $t-1$ időszakot felölelő történeteket és a t időszakban lehetséges kimeneteleket összekapcsoló halmazértékű leképezés alulról félig folytonos és 5) a játékban a játékosok tökéletesen informáltak, akkor létezik tökéletes egyensúlya a játéknak. Az említett tétel bizonyítása számos ponton a halmazértékű leképezésekre vonatkozó klasszikus eredményekre épül, magyarázatul szolgálva a felsorolt feltevések szükségességére. Ahogy Harris megemlíti, tételének következménye Fudenberg és Levine [9] fő eredménye.

Megemlítjük még a [14] cikket, amelyben szintén egy diszkrét idejű véges sok játékossal rendelkező modell kerül bemutatásra kompakt akcióterekkel. A cikk egyik eredménye egy olyan majdnem tökéletesen informált[2] játék megadása, amelyben nem létezik részjáték tökéletes egyensúly. A cikk másik eredménye a következő: mindig létezik részjáték tökéletes egyensúly egy folytonos játékban, ha a játékosok minden egyes kör végén kellően gazdag publikus szignált figyelhetnek meg.

Megközelítésünk betekintést nyújt a véges sztochasztikus játékok egyensúlyának létezési problémájába. A Big Match játékot vizsgálva pontosan látható, hogy melyik nem triviális ponton „csúszik” meg a fixpontos megközelítés. Köztudott, hogy ez a „csúszás” végzetes, a Big Match játéknak nincs Nash-egyensúlya.

Cikkünk felépítése a következő. A 2. fejezetben felidézzük a szükséges matematikai fogalmakat, ismereteket. Ezután a 3. fejezetben a sztochasztikus játékok bevezetésére kerül sor, majd az általánosított diszkontált és a hosszú távú átlagos kifizető függvények kerülnek bevezetésre. A 4. fejezetben a sztochasztikus játékoktól némelyest elrugaszkodva, a folytonos általánosított játékok esetén, az egyensúly létezésének klasszikus, fixponttételen alapuló bizonyítását tárgyaljuk. Ezt az eredményt felhasználva az 5. fejezetben megmutatjuk, hogy a véges általánosított diszkontált sztochasztikus játékoknak van Nash-egyensúlya, mivel ezek a játékok a folytonos általánosított játékok egy alosztályát képzik. A 6. fejezetben bemutatjuk, hogy az egyik legfontosabb sztochasztikus játék a Big Match esetében a diszkontálás helyett hosszú távú átlagos kifizetőfüggvény mellett a megközelítésünk már nem alkalmazható, mivel az így kapott sztochasztikus játék már nem lesz folytonos általánosított játék. Végezetül, a 7. fejezetben röviden összefoglaljuk az eredményeinket.

2. Matematikai előkészítés

A következőkben áttekintjük azokat a főbb matematikai fogalmakat, amiket a cikkben használunk.

Adott X vektortér, és $Y \subseteq X'$, ahol Y az X' egy altere és X' az X-en értelmezett (valós értékű) lineáris funkcionálok halmaza.

Az (X, Y) *duális pár*, ha tetszőleges $x, x' \in X, x \neq x'$-höz létezik $y \in Y$, hogy $y(x) \neq y(x')$; és tetszőleges $y, y' \in Y, y \neq y'$-höz létezik $x \in X$, hogy $x(y) \neq x(y')$.

Adott (X, Y) duális pár, ekkor τ_w a leggyengébb topológia, amire minden $y \in Y$

[2] A majdnem tökéletesen informáltság azt jelenti, hogy az adott időszakban a játékosok szimultán döntenek az összes korábban meghozott döntést ismerve.

folytonos, azaz, τ_w a leggyengébb topológia, amire $Y \subseteq C(X, \tau_w)$. Továbbá, τ_{w^*} a leggyengébb topológia, amire minden $x \in X$ folytonos, azaz, τ_{w^*} a leggyengébb topológia, amire $X \subseteq C(Y, \tau_{w^*})$.

Legyen X egy nemüres halmaz és $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy σ-algebra. Jelölje $\mathrm{cba}(X, \mathcal{M})$ az $\mathcal{M}$ σ-algebrán értelmezett korlátos mértékek osztályát. Továbbá, jelölje $\Delta(X, \mathcal{M})$ az $\mathcal{M}$ σ-algebrán értelmezett valószínűségi mértékek osztályát.

Adott (X, τ) topologikus tér. Jelölje $\mathcal{B}(X, \tau)$ a *Borel-féle σ-algebrát* az (X, τ) topologikus téren, azaz $\mathcal{B}(X, \tau)$ a legszűkebb σ-algebra, ami tartalmazza az X összes τ-nyílt részhalmazát.

Legyen (X, τ) egy Hausdorff-tér (másnéven T_2-tér). Ekkor $\mu \in \Delta(X, \tau)$

- *belső reguláris*, ha minden $A \in \mathcal{B}(X, \tau)$ esetén
$$\mu(A) = \sup \big\{\mu(F)\colon F \subseteq A \text{ és } F \text{ zárt halmaz}\big\};$$
- *feszes*, ha minden $A \in \mathcal{B}(X, \tau)$ esetén
$$\mu(A) = \sup \big\{\mu(K)\colon K \subseteq A \text{ és } K \text{ kompakt halmaz}\big\}.$$

Az $f\colon (X, \tau) \rightrightarrows (Y, \tau')$ halmazértékű leképezés *felülről félig folytonos*, ha tetszőleges $x \in X$ pontra és $V \in \tau'$ nyílt halmazra, amelyre $f(x) \subseteq V$, létezik $U \in \tau$ nyílt halmaz, amelyre $x \in U$ és minden $x' \in U$-ra $f(x') \subseteq V$.

3. Sztochasztikus játékok

Ebben a fejezetben bevezetjük a véges sztochasztikus játék fogalmát, azaz azt a sztochasztikus játékot, ahol a játékosok, az állapotok és az akciók halmaza véges. Fontos hangsúlyoznunk, hogy a továbbiakban, ha elhagyjuk a *véges* jelzőt, akkor is mindig feltesszük e tulajdonság meglétét a vizsgált sztochasztikus játékkal kapcsolatban. A következőkben többször, külön említés nélkül támaszkodunk Solan [28] cikkére.

3.1. Definíció. Egy sztochasztikus játék egy olyan $\Gamma = \langle I, S, (A^i(s))_{s\in S}^{i\in I}, q, r\rangle$ lista, ahol

- $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ a játékosok véges halmaza;
- S az állapotok nemüres, véges halmaza;
- $A^i(s)$ az $i \in I$ játékos $s \in S$ állapotbeli akcióinak nemüres, véges halmaza. Továbbá jelölje $A(s) = \prod_{i\in I} A^i(s)$ az $s \in S$ állapotbeli akcióprofilok halmazát; legyen $A^i = \cup_{s\in S} A^i(s)$ és $A = \cup_{s\in S} A(s)$, $i \in I$;
- $q\colon SA \to \Delta(S)$ az átmenetszabály, ahol $SA = \{(s, a) \in S \times A\colon a \in A(s)\}$;

– $r^i\colon SA \to \mathbb{R}$ az i játékos kifizetésfüggvénye, $i \in I$.

A sztochasztikus játékok osztályozása történhet a játék időbeli lefolyása szerint, amely alapján lehet folytonos vagy diszkrét idejű sztochasztikus játék. Ezek közül mi csak az utóbbival fogunk foglalkozni, ehhez vezessük be a $\mathbb{T} = \{1, 2, 3, \dots\}$ indexhalmazt.

Egy sztochasztikus játékot az eddigiekkel összhangban úgy képzelhetünk el, hogy az az időben játszódik le és a szomszédos időszakokat az átmenetszabály köti össze.

A **játék lefolyása**: Egy sztochasztikus játék (3.1. Definíció) egy $s_1 \in S$ kezdeti állapotból indul, majd minden $t \in \mathbb{T}$ időszakban az alábbi események, az alábbi sorrendben követik egymást:

L1. A játékosok megtudják az aktuális $s_t \in S$ állapotot.

L2. Minden $i \in I$ játékos egyszerre és egymástól függetlenül kiválasztja az aktuális állapot ismeretében az $a_t^i \in A^i(s_t)$ akcióját.

L3. Az így létrejött $a_t = (a_t^i)_{i\in I}$ akcióprofilt a játékosok megismerik, és annak alapján minden $i \in I$ játékos megkapja az adott t időszakra vonatkozó $r^i(s_t, a_t)$ kifizetését.

L4. A következő $s_{t+1} \in S$ állapotot a $q(\cdot \mid s_t, a_t)$ átmenetszabály határozza meg. A sztochasztikus játék továbblép a $t + 1$ időszakba, és visszatérünk az L1. lépéshez.

Egy sztochasztikus játék lejátszása természetesen sokféle módon alakulhat, ezért jelöljük a $t \in \mathbb{T}$ időszakig tartó (vagy röviden t-hosszúságú) *játéktörténet*ek (*history*) halmazát az alábbi módon:

$$H_t = \begin{cases} (SA)^{t-1} \times S, & \text{ha } t > 1, \\ S, & \text{ha } t = 1. \end{cases}$$

Egy $h_t = (s_1, a_1, s_2, a_2, \dots, s_{t-1}, a_{t-1}, s_t) \in H_t$ játéktörténet tehát az addig létrejövő állapotok és a játszott akcióprofilok rendezett alakban való felírása, ügyelve arra, hogy a t időszakra vonatkozólag csak a bekövetkezett állapotot tüntetjük fel.

Egy sztochasztikus játék egy lehetséges lejátszását *játékmenet*nek (*play*) nevezzük, amelyet egy végtelen hosszú játéktörténetként képzelhetünk el. Vezessük be az összes játéktörténet (H) és az összes játékmenet (H_∞) halmazait az alábbiak szerint:

$$H = \bigcup_{t\in\mathbb{T}} H_t \qquad \text{és} \qquad H_\infty = (SA)^{\mathbb{T}}.$$

Az $s \in S$ állapotban az $i \in I$ játékos *kevert akció*ja egy valószínűségi eloszlás az $A^i(s)$ akcióhalmaz felett; így az i játékos kevert akcióinak halmaza az $s \in S$ állapotban $\Delta(A^i(s))$. Tetszőleges $h \in H$ játéktörténetre legyen $s(h) \in S$ az az állapot, ahol a sztochasztikus játék van a h játéktörténet esetén.

3.2. Definíció. Az $i \in I$ játékos $\sigma^i \colon H \to \Delta(A^i)$ stratégiája egy olyan leképezés, amely minden $h \in H$ játéktörténethez hozzárendeli $\Delta(A^i(s(h)))$ egy elemét. Az i játékos stratégiáinak halmazát jelölje Σ^i, és legyen $\Sigma = \prod_{i \in I} \Sigma^i$.

A σ^i stratégia tiszta stratégia, ha minden $h \in H$ játéktörténet esetén $\operatorname{supp} |\sigma^i(h)| = 1$.

A σ^i stratégia stacionárius, ha az pusztán az aktuális állapottól függ, azaz tetszőleges $h, h' \in H$ játéktörténetekre, amelyekre $s(h) = s(h')$, teljesül, hogy $\sigma^i(h) = \sigma^i(h')$.

A σ^i stratégia Markov-stratégia, ha csak az aktuális állapottól és az időszaktól függ, azaz tetszőleges $h, h' \in H$ játéktörténetekre, amelyekre $|h| = |h'|$ és $s(h) = s(h')$, teljesül: $\sigma^i(h) = \sigma^i(h')$.

A 3.2. Definícióban bevezetett stratégiafogalmak esetében láthatjuk, hogy minden stacionárius stratégia egyben Markov-stratégia is.

Tekintsük a játékmenetek halmazát (H_∞). Egy $\hat{h}_t = (\hat{s}_1, \hat{a}_1, \ldots, \hat{s}_t) \in H_t$ játéktörténethez tartozó $C(\hat{h}_t) \subset H_\infty$ cilinderhalmaz azon játékmenetek halmaza, amelyek létrejöhetnek a $\hat{h}_t$ játéktörténet esetén, azaz

$$C(\hat{h}_t) = \left\{ h_\infty = (s_1, a_1, s_2, a_2, \ldots) \in H_\infty \colon s_1 = \hat{s}_1, a_1 = \hat{a}_1, \ldots, s_t = \hat{s}_t \right\}.$$

Legyen $\mathcal{H}$ a $(C(h))_{h \in H}$ halmazok által generált σ-algebra, azaz $(H_\infty, \mathcal{H})$ mérhető tér. Ekkor tetszőleges $\sigma = (\sigma^i)_{i \in I}$ stratégiaprofil és $s_1 \in S$ kezdeti állapot a Kolmogorov-féle kiterjesztési tétel [1, 15.26. Tétel] miatt egyértelműen meghatároz egy $\mathbb{P}_{s_1,\sigma}$ valószínűségi mértéket a $(H_\infty, \mathcal{H})$ mérhető téren. Konkrétan, tetszőleges $\hat{h}_t = (\hat{s}_1, \hat{a}_1, \ldots, \hat{s}_t) \in H_t$ játéktörténetre

$$\mathbb{P}_{s_1,\sigma}(C(\hat{h}_t)) = \chi_{\{s_1 = \hat{s}_1\}} \left(\prod_{\tau=1}^{t-1} \left(\prod_{i \in I} \sigma^i(\hat{a}^i_\tau \mid \hat{h}_t) \right) q(\hat{s}_{\tau+1} | \hat{s}_\tau, \hat{a}_\tau) \right).$$

Ennek alapján jelölje $\mathbb{E}_{s_1,\sigma}$ a $\mathbb{P}_{s_1,\sigma}$ valószínűségi mértékhez tartozó várható érték operátort.

A sztochasztikus játékok esetében általában a 3.3. Definícióban bevezetésre kerülő két kifizetésfüggvény-típust szoktunk használni – vagy azoknak valamilyen hasonló alakját. Amikor egy játékos a λ-diszkontált kifizetést használja, akkor a különböző időszakokban keletkező kifizetések együttes kiértékelésekor figyelembe veszi a kifizetések időértékét is. Ezzel szemben a hosszú távú átlagos kifizetés ugyanakkora súllyal veszi figyelembe a különböző időszakokat és így a nevével összhangban az átlagos értékét adja vissza a kifizetéseknek.

3.3. Definíció. Egy $\Gamma = \langle I, S, (A^i(s))_{s\in S}^{i\in I}, q, r\rangle$ sztochasztikus játékban az $s_1 \in S$ kezdeti állapothoz és a $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofilhoz tartozó λ-diszkontált kifizetés az i játékos számára a $\lambda \in (0, 1]$ diszkontfaktor mellett

$$\gamma_\lambda^i(s_1;\sigma) = \mathbb{E}_{s_1,\sigma}\left[\lambda \sum_{t=1}^{\infty}(1-\lambda)^{t-1} r^i(s_t, a_t)\right] = \lambda \int\limits_{H_\infty} d_\lambda^i(h_\infty)\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{s_1,\sigma}, \tag{1}$$

ahol $d_\lambda^i(h_\infty) = \sum_{t=1}^{\infty}(1-\lambda)^{t-1} r^i(s_t, a_t)$ minden $h_\infty = (s_1, a_1, s_2, a_2, \dots) \in H_\infty$ játékmenetre.

Továbbá, a Γ sztochasztikus játékban az $s_1 \in S$ kezdeti állapothoz és a $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofilhoz tartozó hosszú távú átlagos kifizetés

$$\gamma_{ls}^i(s_1;\sigma) = \mathbb{E}_{s_1,\sigma}\left[\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r^i(s_j, a_j)\right]. \tag{2}$$

Mint már korábban említettük, a 3.3. Definícióban bevezetett kifizetésfüggvényeknek számos alakja létezik, mint ahogy ezt a 3.1. Megjegyzésben is láthatjuk.

3.1. Megjegyzés. A 3.3. Definícióban szereplő λ-diszkontált kifizetésre az $i \in I$ játékos tekintetében teljesül az

$$\mathbb{E}_{s_1,\sigma}\left[\lambda \sum_{t=1}^{\infty}(1-\lambda)^{t-1} r^i(s_t, a_t)\right] = \lambda \sum_{t=1}^{\infty}(1-\lambda)^{t-1}\mathbb{E}_{s_1,\sigma}\left[r^i(s_t, a_t)\right]$$

összefüggés [28, 2.4. fejezet].

Emellett a sorösszeg előtti λ szorzótag a normalizálás célját szolgálja: az a játékos, aki minden egyes játékkörben 1 egységet kap, értékelje a játékmenet diszkontált jelenértékét egységnyinek.

A 3.3. Definícióban bevezetett λ-diszkontált kifizetést általánosíthatjuk úgy, hogy a diszkontfaktor rögzítésétől eltekintünk. Érdekességképpen megemlítjük, hogy már Shapley is utal erre a lehetőségre [25, 1099. oldal 2-es pontja].

3.4. Definíció. Egy $\Lambda\colon \mathbb{T} \times S \to [0, 1]$ függvény diszkontfüggvény, ha tetszőleges $h_\infty = (s_1, a_1, s_2, a_2, \dots) \in H_\infty$ játékmenet esetén

$$\sum_{t=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{t}\Lambda(m, s_m) < \infty.$$

A $\Gamma = \langle I, S, (A^i(s))_{s\in S}^{i\in I}, q, r\rangle$ sztochasztikus játékban az $s_1 \in S$ kezdeti állapothoz és a $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofilhoz tartozó általánosított diszkontált kifizetés az i játékos számára a Λ diszkontfüggvény és $\lambda \in (0, 1]$ diszkontfaktor mellett

$$\begin{aligned}\gamma^i_\Lambda(s_1;\sigma) &= \mathbb{E}_{s_1,\sigma}\left[\lambda\sum_{t=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{t}\Lambda(m,s_m)\right)r^i(s_t,a_t)\right]\\ &= \lambda\int\limits_{H_\infty} d^i_\Lambda(h_\infty)\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{s_1,\sigma} = \lambda d^i_\Lambda(\mathbb{P}_{s_1,\sigma}),\end{aligned} \tag{3}$$

ahol $d^i_\Lambda(h_\infty) = \sum_{t=1}^{\infty}\big(\prod_{m=1}^{t}\Lambda(m,s_m)\big)r^i(s_t,a_t)$, minden $h_\infty = (s_1,a_1,s_2,a_2,\dots) \in H_\infty$ játékmenetre.

Láthatjuk, hogy amennyiben a 3.4. Definícióban a diszkontfüggvényeket

$$\Lambda(t,s_t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t = 1,\\ 1-\lambda & \text{egyébként,}\end{cases}$$

módon választjuk meg $\lambda \in (0,1]$ mellett, akkor adott $h_\infty \in H_\infty$ játékmenet esetén az általánosított diszkontált kifizetés és a λ-diszkontált kifizetés megegyezik.

3.1. Lemma. *A $d^i_\Lambda = \sum_{t=1}^{\infty}\big(\prod_{m=1}^{t}\Lambda(m,\cdot)\big)r^i$ függvény a H_∞ halmazon a szorzattopológiára nézve folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített, és legyen $K > 0$ olyan konstans, amelyre minden n időszakban teljesül $|r(s_n,a_n)| < K$ tetszőleges $s_n \in S$ és $a_n \in A(s_n)$ mellett.

Mivel $\sum_{t=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{t}\Lambda(m,s_m) < \infty$, ezért létezik olyan t^* időszak, hogy

$$\sum_{t=t^*+1}^{\infty}\prod_{m=1}^{t}\Lambda(m,s_m) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Legyen $h^\alpha_\infty = (s^\alpha_1,a^\alpha_1,\dots,s^\alpha_t,a^\alpha_t,\dots)$ és $h^\beta_\infty = (s^\beta_1,a^\beta_1,\dots,s^\beta_t,a^\beta_t,\dots)$ két olyan játékmenet ($h^\alpha_\infty,h^\beta_\infty \in H_\infty$), amelyek az első t^* időszakban egybeesnek: $h^\alpha_t = (s^\alpha_1,a^\alpha_1,\dots,a^\alpha_{t-1},s^\alpha_t) = (s^\beta_1,a^\beta_1,\dots,a^\beta_{t-1},s^\beta_t) = h^\beta_t$, ahol tehát $h^\alpha_t,h^\beta_t \in H_t$. Ekkor

$$\begin{aligned}\left|d^i_\Lambda(h^\alpha_\infty) - d^i_\Lambda(h^\beta_\infty)\right| &= \left|\sum_{t=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{t}\Lambda(m,s_m)\right)r^i(s^\alpha_t,a^\alpha_t) - \sum_{t=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{t}\Lambda(m,s_m)\right)r^i(s^\beta_t,a^\beta_t)\right|\\ &= \left|\sum_{t=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{t}\Lambda(m,s_m)\right)\left(r^i(s^\alpha_t,a^\alpha_t) - r^i(s^\beta_t,a^\beta_t)\right)\right|\\ &\le \sum_{t=t^*+1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{t}\Lambda(m,s_m)\right)\left|\left(r^i(s^\alpha_t,a^\alpha_t) - r^i(s^\beta_t,a^\beta_t)\right)\right| < \varepsilon,\end{aligned}$$

azaz a d^i_Λ függvény folytonos. □

Mivel korábban beláttuk, hogy a λ-diszkontált kifizetés speciális esete az általánosított diszkontált kifizetésnek, ezért a 3.1. Lemma eredménye igaz λ-diszkontált kifizetésre is.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *A* $d^i_\lambda = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda^{t-1} r^i$ *függvény a* H_∞ *halmazon a szorzat-topológiára nézve folytonos.*

3.5. Definíció. Adott egy $\Gamma = \langle I, S, (A^i(s))^{i\in I}_{s\in S}, q, r\rangle$ sztochasztikus játék, az $s_1 \in S$ kezdeti állapot, a Λ diszkontfüggvény és a $\lambda \in (0,1]$ diszkontfaktor. A $\sigma_* = (\sigma^i_*)_{i\in N} \in \Sigma$ stratégiaprofil Nash-egyensúlya a Γ általánosított diszkontált sztochasztikus játéknak az s_1 állapotban, a Λ diszkontfüggvény és a λ diszkontfaktor mellett, ha minden $i \in N$ játékos minden $\sigma^i \in \Sigma^i$ stratégiája esetén

$$\gamma^i_\Lambda(s_1; \sigma_*) \geq \gamma^i_\Lambda(s_1; (\sigma^i, \sigma^{-i}_*)).$$

Egy σ_* stratégiaprofil általánosan diszkontált (Nash-)egyensúly, ha minden kezdeti állapotban általánosan diszkontált egyensúly.

Egy sztochasztikus játékot kétszemélyesnek hívunk, ha csak két játékos szerepel benne ($|I| = 2$). Egy kétszemélyes sztochasztikus játékot zérus összegűnek nevezünk, ha minden $s \in S$ állapotra, $a^1 \in A^1(s)$ és $a^2 \in A^2(s)$ akcióra $r^1(s, (a^1, a^2)) + r^2(s, (a^1, a^2)) = 0$.

A zérus összegű sztochasztikus játékok esetében bevezethetjük a játék értékét a kifizetésfüggvények segítségével. Az egyszerűség kedvéért a 3.6. Definícióban jelöljük a λ-diszkontált kifizetést az egyes játékos „szemszögéből”, azaz $\gamma_\lambda(s; \sigma^1, \sigma^2) = \gamma^1_\lambda(s; \sigma^1, \sigma^2) = -\gamma^2_\lambda(s; \sigma^1, \sigma^2)$; és tegyünk ugyanígy a hosszú távú átlagos kifizetés esetében is: $\gamma_{ls}(s; \sigma^1, \sigma^2) = \gamma^1_{ls}(s; \sigma^1, \sigma^2) = -\gamma^2_{ls}(s; \sigma^1, \sigma^2)$.

Legyen adott egy véges zérus összegű sztochasztikus játék $s_1 \in S$ kezdeti állapottal. Ekkor a (4)-beli $\gamma_\lambda(s_1)$-re vonatkozó összefüggést Shapley [25], míg a $\gamma_{ls}(s_1)$ vonatkozó összefüggést Mertens és Neyman [19, 20] látta be:

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma^1\in\Sigma^1} \inf_{\sigma^2\in\Sigma^2} \gamma_\lambda(s_1; \sigma^1, \sigma^2) = v_\lambda(s_1) = \inf_{\sigma^2\in\Sigma^2} \sup_{\sigma^1\in\Sigma^1} \gamma_\lambda(s_1; \sigma^1, \sigma^2), \\ \sup_{\sigma^1\in\Sigma^1} \inf_{\sigma^2\in\Sigma^2} \gamma_{ls}(s_1; \sigma^1, \sigma^2) = v_{ls}(s_1) = \inf_{\sigma^2\in\Sigma^2} \sup_{\sigma^1\in\Sigma^1} \gamma_{ls}(s_1; \sigma^1, \sigma^2). \end{aligned} \tag{4}$$

3.6. Definíció. Adott egy véges zérus összegű sztochasztikus játék $s_1 \in S$ kezdeti állapottal. Ekkor a (4)-beli $v_\lambda(s_1)$-t a sztochasztikus játék λ-diszkontált értékének, míg $v_{ls}(s_1)$-t a hosszú távú átlagos értékének nevezzük.

4. Folytonos általánosított játékok

Most térjünk át az egyetlen időszakkal és állapottal rendelkező játékokhoz, ezen belül is a 4.1. Definícióban bevezetésre kerülő folytonos általánosított játékok osztályához. Erre a lépésre azért lesz szükségünk, mert egy sztochasztikus játék egyensúlyát a megszokott fixponttételen alapuló megközelítéssel akarjuk vizsgálni.

4.1. Definíció. Egy $\Gamma = \langle I, P, (A_i)_{i\in I}, F, (f_i)_{i\in I}\rangle$ listát folytonos általánosított játéknak nevezünk, ha

1. I a játékosok nemüres, véges halmaza;
2. P nemüres topologikus vektortér, a kimenetelek halmaza;
3. A_i az i játékos nemüres akcióhalmaza, $A = \prod_{i\in I} A_i$ az akcióprofilok halmaza;
4. $F\colon A \to P$ olyan függvény, ami
   - affin,
   - $F(A)$ kompakt és konvex,
   - $F(A_i \times \{a_{-i}\})$ kompakt és konvex, minden $i \in I$ játékosra és $a_{-i} \in A_{-i}$ csonka akcióprofilra,
5. $f_i\colon P \to \mathbb{R}$ az $i \in I$ játékos kifizetőfüggvénye, ami
   - folytonos,
   - konkáv az $F(A_i \times \{a_{-i}\})$ halmaz felett minden $i \in I$ játékosra és $a_{-i} \in A_{-i}$ csonka akcióprofilra.

A következőkben a folytonos általánosított játékok egy részosztályát vezetjük be.

4.2. Definíció. Legyen $\Gamma_B = \langle I, (A_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I}\rangle$ egy játék, ahol

- I a játékosok nemüres, véges halmaza;
- A_i az i játékos nemüres akcióhalmaza, $A = \prod_{i\in I} A_i$ az akcióprofilok halmaza;
- $f_i\colon A \to \mathbb{R}$ az $i \in I$ játékos kifizetőfüggvénye.

Ha az előbbi $\Gamma_B = \langle I, (A_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I}\rangle$ játékhoz létezik a $\hat{\Gamma}_B = \langle I, (\hat{A}_i)_{i\in I}, (\hat{f}_i)_{i\in I}\rangle$ játék, ahol

- $\hat{A}_i = \Delta(A_i)$ minden $i \in I$ játékosra,
- $\hat{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \int_A f_i \, \mathrm{d}(\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$;

akkor ezt a $\hat{\Gamma}_B$ játékot a Γ_B játék kevert bővítésének hívjuk.

A kevert bővítés azonban nem mindig létezik, ahogy ezt az általánosított Wald-játék [36] esetében láthatjuk.

4.1. Példa. (Általánosított Wald-játék) Az általánosított Wald-játék egy olyan $\langle I, (A_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I}\rangle$ játék, ahol

– $I = \{1, 2\}$,

– $A_i = ([0, 1], \tau_d)$, azaz a $[0, 1]$ intervallum a diszkrét topológiával minden $i \in I$ játékosra,

– a játékosok kifizetésfüggvénye pedig

$$f_1(a_1, a_2) = -f_2(a_1, a_2) = \begin{cases} 1 & \text{ha } a_1 \geq a_2, \\ 0 & \text{ha } a_1 < a_2. \end{cases}$$

Az általánosított Wald-játéknak nincs kevert kiterjesztése. Vegyük észre, hogy f_1 pontosan a $G = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \colon x \geq y\}$ halmaz felett 1, különben 0. Ebből kifolyólag az f_1 függvény a G halmaz indikátorfüggvénye: $f_1 = \chi_G$.

Ugyanakkor G nincs benne a cilinderhalmazok generálta σ-algebrában ($[0, 1] \times [0, 1]$ felett), azaz f_1 nem integrálható. Magyarán szólva $\hat{f}_1$ nem definiált, azaz az általánosított Wald-játéknak nincs kevert kiterjesztése.

A 4.1. Állításban elégséges feltételt adunk a kevert bővítés létezésére.

4.1. Állítás. *Legyen $\Gamma_B = \langle I, (A_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I}\rangle$ a 4.2. Definícióban szereplő játék, ahol A_i kompakt metrizálható tér és f_i a szorzattopológiára nézve folytonos függvény minden $i \in I$-re. Ekkor a Γ_B játéknak van kevert bővítése.*

Továbbá a kevert bővítés egy folytonos általánosított játék.

Bizonyítás. A_i feltevésünk szerint metrizálható minden $i \in I$ játékos esetén, ezért $\mu_i \in \Delta(A_i)$ belső reguláris valószínűségi mérték [1, 12.5. tétel]. Mivel ezenfelül A_i kompakt halmaz is, emiatt minden zárt részhalmaza is kompakt, így $\mu_i \in \Delta(A_i)$ valószínűségi mérték feszes.

Feltevésünk szerint tetszőleges $i \in I$ játékos f_i kifizetésfüggvénye folytonos a szorzattopológiában, ezért ezen kifizetésfüggvények integrálhatók tetszőleges, a szorzattopológia Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mérték szerint. Továbbá tetszőleges $\mu_i \in \Delta(A_i)$, $i \in I$, esetén $\mu = \times_{i\in I}\mu_i$ egy valószínűségi mérték a cilinderhalmazok által generált σ-algebrán. Könnyen látható, hogy μ feszes.

Mivel A kompakt metrizálható tér, ezért $\Delta(A)$, az A Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mértékek halmaza, tetszőleges eleme feszes. Ezért μ egyértelműen kiterjeszthető az A Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mértékké. Tehát a továbbiakban μ alatt a $\Delta(A)$ egy elemét értjük.

Tehát a 4.2. Definícióban bevezetett $\hat{f}_i$ várható kifizetésfüggvény minden $i \in I$ játékosra létezik, azaz a Γ_B játék kevert bővítése $\langle I, (\Delta(A_i)_{i\in I}), (\hat{f}_i)_{i\in I}\rangle$ létezik.

Tekintsük a $(C(A), \mathrm{cba}(A))$ duális párt. Mivel A kompakt metrizálható, így $\Delta(A)$ is kompakt metrizálható lesz a gyenge* topológiában [1, 15.11. Tétel][3]. Továbbá $\prod_{i\in I}\Delta(A_i)$ gyenge* zárt részhalmaza $\Delta(A)$-nak, tehát gyenge* kompakt.

Könnyen látható továbbá, hogy a $\prod_{i\in I}\Delta(A_i)$ halmaz konvex. Továbbá feltevésünk szerint tetszőleges $i \in I$ játékos esetén $f_i \in C(A)$, így az $\hat{f}_i$ (várható) kifizetésfüggvény folytonos és lineáris, tehát konkáv is.

Tehát $\prod_{i\in I}\Delta(A_i)$ gyenge* kompakt, $\hat{f}_i$ lineáris folytonos függvény, $i \in I$.

Legyen $P = \prod_{i\in I}\Delta(A_i)$ és $F = \mathrm{id}$. Világos, hogy F teljesíti a 4.1. Definícióban megkívántakat.

Ekkor a kevert kiterjesztés egy folytonos általánosított játék. □

A következőkben a Nash-egyensúly [22, 23] fogalmát definiáljuk folytonos általánosított játékokra.

4.3. Definíció. Adott $\Gamma = \langle I, P, (A_i)_{i\in I}, F, (f_i)_{i\in I}\rangle$ folytonos általánosított játék. Ekkor $a^* \in A$ a Γ játék Nash-egyensúlya, ha tetszőleges $i \in I$ játékosra és tetszőleges $a_i \in A_i$ stratégiára

$$f_i \circ F(a^*) \geq f_i \circ F(a_i, a^*_{-i}).$$

Könnyen látható, hogy amennyiben $P = A$, azaz $F = \mathrm{id}$, akkor visszakapjuk a normál játékok esetén jól ismert Nash-egyensúly [23] fogalmát.

4.1. Folytonos általánosított játékok egyensúlya

Tekintsük először az alkalmazott fixponttételt [11, 171–172. oldal].

4.1. TÉTEL. *Legyen $\Phi\colon K \rightrightarrows K$ egy olyan halmazértékű leképezés, ahol $K \subset X$ egy nemüres, konvex, kompakt részhalmaza egy X Hausdorff topologikus vektortérnek, amire*

– $\Phi(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in K$,

– $\Phi(x)$ *konvex*, $\forall x \in K$,

– Φ *felülről félig folytonos.*

Ekkor a Φ leképezésnek létezik fixpontja, azaz van olyan $x \in K$, hogy $x \in \Phi(x)$.

[3] A $\Delta(A)$ halmazon a gyenge* topológia szubtilisát a

$$\left\{\mu \in \Delta(A) : \left|\int_A f \,\mathrm{d}\,\mu - \int_A f \,\mathrm{d}\,\mu'\right| < \varepsilon\right\}$$

halmazok alkotják, ahol $f \in C(A)$, $\mu' \in \Delta(A)$ és $\varepsilon > 0$.

A 4.2. Tételben kimondjuk a Nash-egyensúly létezését a folytonos általánosított játékokra, amely a 4.1. Tétel alkalmazása. Megjegyezzük továbbá, hogy a 4.2. Tétel Glicksberg eredményének egy általánosítása [11, 172–174. oldal].

4.2. Tétel. *Tetszőleges $\langle I, P, (A_i)_{i\in I}, F, (f_i)_{i\in I}\rangle$ folytonos általánosított játéknak van Nash-egyensúlya.*

Bizonyítás. Legyen n játékosunk, azaz $I = \{1, \ldots, n\}$, és i tetszőleges játékos. Definiáljuk a következő leképezést (legjobbválasz leképezés): tetszőleges $p = F(a) \in F(A)$-ra

$$B_i(p) = \operatorname*{arg\,max}_{p' \in F(A_i \times \{a_{-i}\})} f_i(p').$$

Vegyük észre, hogy mivel $F(A_i \times \{a_{-i}\})$ kompakt halmaz és az f_i kifizetésfüggvény folytonos, ezért $B_i(p) \neq \emptyset$.

Továbbá az f_i kifizetésfüggvény konkáv az $F(A_i \times \{a_{-i}\})$ halmazon – amely feltevésünk szerint konvex halmaz –, ezért $B_i(p)$ konvex halmaz.

Végezetül mivel $F(A)$ kompakt halmaz, $F(A_i \times \{a_{-i}\})$ kompakt halmaz minden $a_{-i} \in A_{-i}$-re, és az f_i kifizetésfüggvény folytonos, ezért a Berge-féle Maximum tétel [1, 17.31 Berge Maximum Theorem, 570. oldal] miatt B_i legjobbválasz leképezés felülről félig folytonos.

Legyen $B\colon P \rightrightarrows P$ a következő

$$B(p) = F\left(\prod_{i\in I} \left(F^{-1}(B_i(p))\right)_i\right),$$

minden $p \in F(A)$-ra.

Világos, hogy tetszőleges $a \in \prod_{i\in I}(F^{-1}(B_i(p)))_i$-re $F(a) \in B(p)$, minden $p \in F(A)$-ra. Tehát $B(p) \neq \emptyset$ minden $p \in F(A)$-ra.

Mivel F affin, ezért $\prod_{i\in I}(F^{-1}(B_i(p)))_i$ konvex halmaz. Tehát $B(p) = F(\prod_{i\in I}(F^{-1}(B_i(p)))_i)$ konvex halmaz minden $p \in F(A)$-ra.

Végezetül, mivel a B_i leképezések felülről félig folytonosak minden $i \in I$-re, ezért B is felülről folytonos.

Alkalmazzuk a 4.1. Tételt, azaz a B leképezésnek van fixpontja. Legyen $s^* \in F(A)$ a B leképezés egy fixpontja.

Ekkor tetszőleges $a^* \in A$, amelyre $s^* = F(a^*)$, a folytonos általánosított játék Nash-egyensúlya. □

4.1. Következmény. *Legyen $\Gamma = \langle I, P, (A_i)_{i\in I}, F, (f_i)_{i\in I}\rangle$ egy olyan folytonos általánosított játék, amelyben $a \in A$ és $\hat{a} \in A$ stratégiaprofilok Nash-egyensúlyok és $F(a) = F(\hat{a})$. Ekkor tetszőleges $\beta \in [0, 1]$ esetén fennáll, hogy $\beta a + (1 - \beta)\hat{a}$ is Nash-egyensúly.*

A 4.1. Következmény nem meglepő, hiszen ha egy játékban két különböző stratégiaprofil ugyanazt a lejátszást generálja, akkor azok csak a meg nem valósult történetekben különböznek, azaz a konvex kombinációjuk is ugyanazt a lejátszást generálja.

5. Sztochasztikus játékok diszkontálással

Ebben a részben az a célunk, hogy egy fixponttételen alapuló bizonyítást adjunk az általánosított diszkontált sztochasztikus játékok Nash-egyensúlyának létezésére. Megmutatjuk, hogy minden általánosított diszkontált sztochasztikus játék folytonos általánosított játék.

Mivel egy sztochasztikus játékban véges számú játékosunk van, ezért a 4.1. Definícióban szereplő megkötés teljesül a játékosok halmazára. A többi megkötést a következő segédtételekben tárgyaljuk.

Tekintsük a $(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ párt, ahol – emlékeztetőül – $\mathcal{B}(H_\infty)$ a játékmenetek halmazán lévő Borel-féle σ-algebra (ami megegyezik $\mathcal{H}$-val). Ekkor tetszőleges $s_1 \in S$ kezdeti állapot és $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofil mellett $(s_1, \sigma) \in \Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ adódik (Kolmogorov-féle kiterjesztési tétel).

Adott egy $\Gamma = \langle I, S, (A^i(s))_{s\in S}^{i\in I}, q, r\rangle$ sztochasztikus játék, az $s_1 \in S$ kezdeti állapot, a Λ diszkontfüggvény és a $\lambda \in (0, 1]$ diszkontfaktor. Továbbá legyen

- $P = \Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ a kimenetelek halmaza;
- $A_i = \Sigma^i$, $i \in I$;
- $F\colon \Sigma \to P$ az a leképezés, hogy egy $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofil esetén $F(\sigma) \in \Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ a Kolmogorov-féle kiterjesztési tétel által adott valószínűségi mérték (az adott s_1 kezdeti állapot mellett);
- $f_i = \lambda d^i_\Lambda$ (ld. (3) egyenlet).

Tekintsük a következő lemmákat:

5.1. Lemma. *Az F leképezés affin.*

Bizonyítás. A Kolmogorov-féle kiterjesztési tétel közvetlen következménye. □

5.2. Lemma. *$F(\Sigma)$ gyenge* kompakt halmaz.*

Bizonyítás. Mivel a játékmenetek H_∞ halmaza kompakt metrizálható tér, ezért $\Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ gyenge* kompakt (metrizálható) halmaz [1, 15.11. Tétel], ahol a duális pár a következő: $(C(H_\infty), \mathrm{cba}(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty)))$.

Azt kell megmutatni, hogy minden rögzített s_1 kezdeti állapot mellett a stratégiaprofilok $F(\Sigma) = \{(s_1, \sigma)\colon \sigma \in \Sigma\} \subset \Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ halmaza gyenge* zárt halmaz (hiszen gyenge* kompakt halmaz gyenge* zárt részhalmaza gyenge* kompakt).

Vezessük be minden $t \in \mathbb{T}$ időszakra az alábbi két halmazt:

- $S_t = \{(s_1, \sigma)|_{H_t} \colon \sigma \in \Sigma$ és $H_t \subseteq H\}$ azon $\Delta(H_t, \mathcal{B}(H_t))$ elemek halmaza (ld. F definíciója), amelyek az s_1 kezdeti állapottal és a játéktörténetek H_t halmazával „kompatibilisek”,
- $U_t = \{\nu \in \Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty)) \colon \nu|_{(H_t, \mathcal{B}(H_t))} \in S_t\}$ azon valószínűségi mértékek halmaza, amelyeket a játéktörténetek H_t halmazára megszorítva egy-egy S_t-beli stratégiaprofil generálja.

Láthatjuk, hogy minden $t \in \mathbb{T}$ esetén $U_t \subseteq \Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$.

Vegyük észre, hogy minden $t \in \mathbb{T}$ időszakra az U_t gyenge* zárt részhalmaza $\Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ gyenge* kompakt halmaznak a végesség (véges dimenzió) miatt. Emellett minden $t \in \mathbb{T}$ időszakra $U_{t+1} \subseteq U_t$ teljesül.

Továbbá $F(\Sigma) = \cap_{t \in \mathbb{T}} U_t$, tehát tetszőleges s_1 kezdeti állapot esetén $F(\Sigma) = \{(s_1, \sigma) \colon \sigma \in \Sigma\}$ gyenge* zárt halmaz, tehát állításunkat beláttuk. □

5.3. Lemma. *$F(\Sigma)$ konvex.*

Bizonyítás. Világos, hogy Σ konvex halmaz. Mivel F affin (ld. 5.1. Lemma), ezért $F(\Sigma)$ konvex. □

5.4. Lemma. *Tetszőleges $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofilra és $i \in I$ játékosra $F(\Sigma^i \times \{\sigma^{-i}\})$ konvex és kompakt.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\Sigma^i \times \{\sigma^{-i}\}$ konvex halmaz minden $i \in I$-re és $\sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}$-re. Mivel F affin (ld. 5.1. Lemma), ezért $F(\Sigma^i \times \{\sigma^{-i}\})$ konvex minden $i \in I$-re és $\sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}$-re.

$F(\Sigma^i \times \{\sigma^{-i}\})$ kompaktságának bizonyítása az 5.2. Lemma bizonyításával analóg módon megy. □

A folytonos általánosított játék definíciójában a kifizetésfüggvényről feltettük, hogy folytonos és a játékos saját akciója tekintetében affin is. Ezt a tulajdonságát látjuk be a diszkontált kifizetésnek a következő Lemmában.

5.5. Lemma. *Minden $s_1 \in S$ kezdeti állapot, $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofil, $\lambda \in (0, 1]$ diszkontfaktor és Λ diszkontfüggvény mellett a $\gamma^i_\Lambda(s_1) \colon \Sigma \to \mathbb{R}$ Λ-diszkontált kifizetés affin függvény.*

Bizonyítás. A Λ-diszkontált kifizetés definíciójának (ld. (3) képlet) közvetlen következménye. □

Az előző Lemmák miatt adódik a következő állítás:

5.1. Állítás. *Minden általánosított diszkontált sztochasztikus játék folytonos általánosított játék.*

A 3.5. és a 4.3. Definíciók, valamint az 5.1. Állítás miatt adódik, hogy

5.1. Következmény. *Adott egy $\langle I, S, (A^i(s))_{s\in S}^{i\in I}, q, r\rangle$ sztochasztikus játék, $s_1 \in S$ kezdeti állapot, Λ diszkontfüggvény és $\lambda \in (0,1]$ diszkontfaktor. Ekkor $\langle I, P, (A_i)_{i\in I}, F, (f_i)_{i\in I}\rangle$ egy folytonos általánosított játék.*

Vegyük észre, hogy előfordulhat az alábbi eset: $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ egy általánosított diszkontált sztochasztikus játék két eltérő stratégiaprofilja (azaz $\sigma \neq \sigma'$), de $F(\sigma) = F(\sigma')$.

Végül a fenti eredmények alapján kimondhatjuk, hogy az általánosított diszkontált kifizetéssel rendelkező sztochasztikus játékok a folytonos általánosított játékok osztályában találhatók, így létezik Nash-egyensúlyuk.

5.1. Tétel. *Minden általánosított diszkontált sztochasztikus játéknak van Nash-egyensúlya.*

6. A Big Match

A Big Match egy kétszemélyes zérus összegű sztochasztikus játék [10], ami a $t = 1$ időszakban a játékosok számára ismert $s_1 \in S$ állapotból indul. A játékosok egyszerre és egymástól függetlenül hozzák meg döntéseiket, ami által az aktuális állapot és a megjátszott akcióprofil egyértelműen meghatározza a $t = 2$ időszakbeli állapotot. A $t = 2$ időszakban a játékosok a döntésüket megint az aktuális állapot ismeretében hozzák meg egyszerre és egymástól függetlenül, így kialakítva a $t = 3$ időszakbeli állapotot, és így tovább.

Ezek alapján tehát a Big Match sztochasztikus játékra teljesül a 3. részben leírt, a sztochasztikus játékokat jellemző általános lefolyási séma.

	Bal (L)	Jobb (R)
Fel (T)	1	0
Le (B)	0^{s_2}	1^{s_3}

(a) s_1 állapot

	Bal (L)
Le (B)	0^{s_2}

(b) s_2 állapot

	Jobb (R)
Le (B)	1^{s_3}

(c) s_3 állapot

1. táblázat. Big Match játék állapotai és a hozzájuk tartozó kifizetések a sorjátékos szemszögéből.

Vegyük észre, hogy az s_2 és s_3 állapotok speciális állapotok, amibe ha a játék menete elér, azt már nem hagyja el. Az ilyen állapotokat elnyelő állapotnak nevezzük. Mivel a Big Match sztochasztikus játéknak csak az s_1 állapota nem elnyelő, emiatt a Big Match egy zérus összegű, elnyelő sztochasztikus játék.

A Big Match játékban a sorjátékos adott időszakbeli kifizetése 1, amennyiben a (Fel, Bal) vagy $(Le, Jobb)$ akcióprofilok valamelyike jön létre az aktuális állapotban, egyébként pedig 0 (lásd az 1. táblázatot).

A hagyományokat őrizve a játékosok kifizetésfüggvénye a Big Match sztochasztikus játékban a hosszú távú átlagos kifizetés. A Big Match játékot Gillette [10] vezette be és Blackwell and Ferguson [4] mutatta meg, hogy létezik hosszú távú átlagos értéke a játéknak.

6.1. Tétel. (Blackwell and Ferguson [4], 1. Tétel) *A Big Match sztochasztikus játéknak a hosszú távú átlagos értéke* $\frac{1}{2}$.

Ugyanakkor a Big Match játék olyan sztochasztikus játék, amely nem tartozik a folytonos általánosított játékok osztályába – ugyanis a hosszú távú átlagos kifizetés nem folytonos függvény még a stacionárius stratégiák esetében sem.

Ennek igazolására tegyük fel, a sorjátékos x stacionárius stratégiája ellen az oszlopjátékos végig az $(1, 0)$ stratégiát játssza. Jelöljük ezt a stacionárius stratégiát y-nal. Ekkor a sorjátékos hosszú távú átlagos kifizetése

$$\gamma^1_{ls}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = (1, 0), \\ 0, & \text{ha } x \in \{(1-p, p) : 0 < p \leq 1\}, \end{cases}$$

ami nem folytonos függvény.

A Big Match sztochasztikus játék esetén ismert, hogy az oszlopjátékosnak van optimális stratégiája az s_1 kezdeti állapotban, pontosabban van stacionárius optimális stratégiája; mégpedig az oszlopjátékos mindig az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ kevert akciót játssza. Ezzel szemben ismert, hogy a sorjátékosnak nincs ilyen stratégiája.

6.1. Lemma. (Thuijsman [32], 3. Lemma) *A sorjátékosnak nincs optimális stratégiája az* s_1 *kezdeti állapot mellett.*

7. Összefoglalás

Cikkünkben a véges sztochasztikus játékok elméletét mutattuk be röviden. A fő célunk az volt, hogy egy új alternatív bizonyítást adjunk a véges általánosított diszkontált sztochasztikus játékok egyensúlyának létezésére. Ennek érdekében először bevezettük a folytonos általánosított játékok osztályát, amely játékok egyensúlyának létezését a Glicksberg-féle fixponttétel biztosítja. Ezután beláttuk, hogy a véges általánosított diszkontált sztochasztikus játékok az előbb említett játékosztályhoz tartoznak, így létezik egyensúlyuk.

A cikk végén a Big Match sztochasztikus játék példáján keresztül érzékeltettük, hogy nem minden sztochasztikus játék folytonos általánosított játék.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönik a bírálók konstruktív és javító megjegyzéseit és ajánlásait. Ezt a kutatást az NFKI (K146649) támogatta.

Hivatkozások

[1] C.D. Aliprantis and K.C. Border: *Infinite Dimensional Analysis: a Hitchhiker's Guide*, Springer Berlin, (2006).

[2] T. Bewley and E. Kohlberg: *The Asymptotic Theory of Stochastic Games*, Mathematics of Operations Research, Vol. **1** No. **3**, pp. 197–208 (1976). DOI: 10.1287/moor.1.3.197

[3] D. Blackwell: *Discrete Dynamic Programming*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. **33** No. **2**, pp. 197–208 (1962). DOI: 10.1214/aoms/1177704593

[4] D. Blackwell and T.S. Ferguson: *The Big Match*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. **39** No. **1**, pp. 159–163 (1968). DOI: 10.1214/aoms/1177698513

[5] H. Everett: *Recursive Games*, Contributions to the Theory of Games (AM-39), Princeton University Press, Vol. **III**, pp. 47–78 (1958). DOI: 10.1515/9781400882151-004

[6] A.M. Fink: *Equilibrium in a stochastic n-person game*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math., Vol. **28** No. **1**, pp. 89–93 (1964). DOI: 10.32917/hmj/1206139508

[7] J. Flesch: *Stochastic games with the average reward*, PhD Thesis, University of Maastricht, the Netherlands (1998). DOI: 10.26481/dis.19981118jf

[8] J. Flesch, J. Kuipers, G. Schoenmakers and K. Vrieze: *Subgame perfection in positive recursive games with perfect information*, Mathematics of Operations Research, Econ Theory, Vol. **35** No. **1**, pp. 193–207 (2010). DOI: 10.1287/moor.1090.0437

[9] D. Fudenberg and D. Levine: *Subgame-perfect equilibria of finite-and infinite-horizon games*, Journal of Economic Theory, Vol. **31** No. **2**, pp. 251–268 (1983). DOI: 10.1016/0022-0531(83)90076-5

[10] D. Gillette: *Stochastic games with zero stop probabilities*, Contributions to the Theory of Games (AM-39), Princeton University Press, Vol. **III**, pp. 179–188 (1958). DOI: 10.1515/9781400882151-011

[11] I.L. Glicksberg: *A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Application to Nash Equilibrium Points*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. **3** No. **1**, pp. 170–174 (1952). DOI: 10.2307/2032478

[12] C. Harris: *A characterisation of the perfect equilibria of infinite horizon games*, Journal of Economic Theory, Vol. **37** No. **1**, pp. 99–125 (1983). DOI: 10.1016/0022-0531(85)90032-8

[13] C. Harris: *Existence and Characterization of Perfect Equilibrium in Games of Perfect Information*, Econometrica, Vol. **53** No. **3**, pp. 322–334 (1985). DOI: 10.2307/1911658

[14] C. Harris, P. Reny and A. Robson: *The Existence of Subgame-Perfect Equilibrium in Continuous Games with Almost Perfect Information: A Case for Public Randomization*, Econometrica, Vol. **63** No. **3**, pp. 507–544 (1995). DOI: 10.2307/2171906

[15] D. Levhari and L.J. Mirman: *The Great Fish War: An Example Using a Dynamic Cournot-Nash Solution*, The Bell Journal of Economics, Vol. **11** No. **1**, pp. 322–334 (1980). DOI: 10.2307/3003416

[16] Y. Levy: *Discounted Stochastic Games With No Stationary Nash Equilibrium: Two Examples*, Econometrica, Vol. **81** No. **5**, pp. 1973–2007 (2013). DOI: 10.3982/ECTA10530

[17] Y. Levy and A. McLennan: *Corrigendum to „Discounted Stochastic Games With No Stationary Nash Equilibrium: Two Examples"*, Econometrica, Vol. **83** No. **3**, pp. 1237–1252 (2015). DOI: 10.3982/ECTA12183

[18] A. Maitra and T. Parthasarathy: *On stochastic games*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **5**, pp. 289–300 (1970). DOI: 10.1007/BF00927915

[19] J.F. Mertens and A. Neyman: *Stochastic games*, International Journal of Game Theory, Vol. **10**, pp. 53–66 (1981). DOI: 10.1007/BF01769259

[20] J.F. Mertens and A. Neyman: *Stochastic games have a value*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. **79** No. **6** pp. 2145–2146 (1982). DOI: 10.1073/pnas.79.6.2145

[21] J. Milnor and L.S. Shapley: *On Games of Survival*, Stochastic Games and Related Topics, Springer Dordrecht, Vol. **7**, pp. 207–233 (1982).
DOI: 10.1007/978-94-011-3760-7_19

[22] J. Nash: *Equilibrium points in n-person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. **36** No. **1**, pp. 48–49 (1950). DOI: 10.1073/pnas.36.1.48

[23] J. Nash: *Non-Cooperative Games*, Annals of Mathematics, Vol. **54** No. **2**, pp. 286–295 (1951). DOI: 10.2307/1969529

[24] T.E.S. Raghavan: *Non-Cooperative Games*, A Stochastic Game Model of Tax Evasion, Advances in Dynamic Games, Birkhäuser Boston, Vol. **8**, pp. 397–420 (2006).
DOI: 10.1007/0-8176-4501-2_21

[25] L.S. Shapley: *Stochastic Games**, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. **39**, pp. 1095–1100 (1953). DOI: 10.1073/pnas.39.10.1095

[26] R.S. Simon: *The challenge of non-zero-sum stochastic games*, International Journal of Game Theory, Vol. **45** No. **1-2** pp. 191–204 (2016). DOI: 10.1007/s00182-015-0497-3

[27] E. Solan: *Three-Player Absorbing Games*, Mathematics of Operations Research, Vol. **24** No. **3**, pp. 669–698 (1999). DOI: 10.1287/moor.24.3.669

[28] E. Solan: *A Course in Stochastic Game Theory*, Cambridge University Press, (2022).

[29] E. Solan and N. Vieille: *Quitting games*, Mathematics of Operations Research, Vol. **26** No. **2**, pp. 265–285 (2001). DOI: 10.1287/moor.26.2.265.10549

[30] E. Solan and N. Vieille: *Stochastic games*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. **112** No. **45**, pp. 13743–13746 (2015). DOI: 10.1073/pnas.1513508112

[31] M. Takahashi: *Equilibrium points of stochastic non-cooperative n-person games*, Journal of Science of the Hiroshima University, Series A-I (Mathematics), Vol. **28** No. **1**, pp. 95–99 (1964). DOI: 10.32917/hmj/1206139509

[32] F. Thuijsman: *The Big Match and the Paris Match*, Stochastic Games and Applications, Springer Dordrecht, Vol. **570**, pp. 195–204 (2003). DOI: 10.1007/978-94-010-0189-2_12

[33] N. Vieille: *Two-player stochastic games I: A reduction*, Israel Journal of Mathematics, Vol. **119**, pp. 55–91 (2000). DOI: 10.1007/BF02810663

[34] N. Vieille: *Equilibrium in 2-person stochastic games II: The case of recursive games*, Israel Journal of Mathematics, Vol. **119**, pp. 93–126 (2000). DOI: 10.1007/BF02810664

[35] J. von Neumann: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen, Vol. **100**, pp. 295–320 (1928). DOI: 10.1007/BF01448847

[36] A. Wald: *Generalization of a Theorem By v. Neumann Concerning Zero Sum Two Person Games*, Annals of Mathematics, Vol. **46** No. **2**, pp. 281–286 (1945). DOI: 10.2307/1969023

[37] W. Winston: *A Stochastic Game Model of a Weapons Development Competition*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. **16** No. **3**, pp. 411–419 (1978). DOI: 10.1137/0316026

Balog Imre 1991-ben született Békéscsabán. BSc és MSc tanulmányait a Budapesti Corvinus Egyetemen (BCE) végezte el. Jelenleg a BCE Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskola hallgatója. Fő kutatási területe a nemkooperatív játékelmélet.

Balog Imre
Budapesti Corvinus Egyetem,
Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskola
imrebalog1991@gmail.com

Pintér Miklós a Budapesti Corvinus Egyetemen a Corvinus Center for Operations Research kutatóközpontban dolgozik. Fő kutatási területei: döntéselmélet, játékelmélet, matematikai közgazdaságtan és operációkutatás.

Pintér Miklós
Budapesti Corvinus Egyetem,
Corvinus Center for Operations Research
pmiklos@protonmail.com

CONTINUOUS GENERALIZED GAMES

Imre Balog, Miklós Pintér

In this article we focus on finite stochastic games. After introducing the basic concepts and giving a brief mathematical overview, we examine the existence of equilibrium for finite stochastic games.

Our goal is to use a new concept – continuous generalized game – to provide a different proof for the existence of equilibrium for finite generalized discounted stochastic games. We prove that all finite generalized discounted stochastic games are so-called continuous generalized game. After that, we show that every continuous generalized game has an equilibrium.

Furthermore, through the example of one of the most well-known classical stochastic games, the Big Match, we illustrate that if the players' payoffs are given by the long-run average reward instead of the generalized discounted reward, then the finite stochastic game no longer necessarily belongs to the class of continuous generalized games, and even in the case of Big Match, it has no equilibrium either.