Alkalmazott Matematikai Lapok **39** (2022), 1–17.
DOI: xxx

LÉNYEGES KOALÍCIÓK NEM KIEGYENSÚLYOZOTT JÁTÉKOK ESETÉN

DORNAI ZSÓFIA, PINTÉR MIKLÓS

Cikkünkben az átruházható hasznosságú kooperatív játékok prenukleoluszának kiszámításával foglalkozunk. Huberman [5] tétele, amely a lényeges koalíciók fogalmát használja, jelentősen megkönnyítheti a prenukleolusz kiszámítását számítástudományi szempontból is. Huberman [5] tétele azonban csak az ún. kiegyensúlyozott kooperatív játékok esetében használható.

Ebben a cikkben két, egymástól független általánosítását adjuk Huberman tételének tetszőleges átruházható hasznosságú kooperatív játékokra. Ehhez két új fogalmat vezetünk be, amelyek a szűken lényegesség és az első rendben lényegesség. A szűken lényegesség fogalom segítségével kimondott tételek nem csak kiterjesztései a lényeges koalíciók fogalmát használó tételnek tetszőleges átruházható hasznosságú kooperatív játékra, hanem a kiegyensúlyozott kooperatív játékok esetében is valódi általánosítását kapjuk Huberman tételének.

1. Bevezetés

A kooperatív játékelmélet egyik fő ága az átruházható hasznosságú játékok (a továbbiakban játékok) vizsgálata, ahol adott játékosok esetén adottak az egyes játékos csoportok, a koalíciók értékei, és ennek fényében vizsgáljuk, hogy az egyes játékosoknak mekkora a „fontossága” az adott játékban. Erre a kérdésre adnak különböző megközelítésű válaszokat a megoldások és az értékek. A megoldás (pl. mag [3, 10], kernel [2], alkuhalmaz [1]) egy olyan halmazértékű leképezés, ami minden vizsgált játékhoz a játékosok számának megfelelő dimenziójú valós vektortér egy részhalmazát rendeli, az érték pedig (pl. Shapley-érték [9], (pre)nukleolusz [8]) egy szingleton értékű megoldás.

A leggyakoribb megközelítés szerint a nagykoalíció (a játékoshalmaz) értékét szeretnénk valamilyen értelemben igazságosan szétosztani a játékosok között. A mag esetében például úgy szeretnénk szétosztani a nagykoalíció értékét, hogy egyik koalíció se járjon rosszul, azaz a koalíció tagjai együttesen mindig legalább annyit kapjanak, mint amennyi az adott koalíció értéke (koalíciós racionalitás). Ilyen elosztás természetesen nem minden esetben valósítható meg, ilyenkor nevezzük a játékot nem kiegyensúlyozottnak.

Egy másik megközelítés szerint a nagykoalíció értékét úgy szeretnénk szétosztani, hogy a legrosszabbul járó koalíció a legkevésbé járjon rosszul, és legyen ugyanez igaz a második legrosszabbul járó koalícióra, és így tovább. Ez a (pre)nukleolusz háttérgondolata.

A nukleolusz és a prenukloelusz közötti különbség az, hogy a nukleolusz esetén kikötjük, hogy az egy elemű koalíciók, más néven szingletonok elégedettek legyenek (egyéni racionalitás), azaz ne kaphasson egyik játékos sem kevesebbet, mint amennyi az önálló értéke, míg a prenukleolusz esetén ilyen kikötést nem teszünk. Természetesen nem minden esetben valósítható meg, hogy úgy osszuk el a nagykoalíció értékét, hogy a szingletonok elégedettek legyenek, ilyenkor a játék nukleolusza üres, bármely egyéb esetben pedig pontosan egy elemű. A prenukleolusz esetén az egyértelműség viszont fennáll minden játékra.

A nukleolusz és a prenukleolusz kiszámítására alkalmazott emblematikus algoritmus a lexikografikus közép módszer [6, 7], ami lineáris programozási feladatok egy véges sorozata. Az egyetlen számításelméleti szempontból is releváns problémát az jelenti, hogy habár egy lineáris programozási feladat polinom időben megoldható, és elegendő a játékosok számában lineárisan sokat megoldani a (pre)nukleolusz kiszámításához, az algoritmus a játékosok számában mégsem polinomiális, mivel minden egyes koalícióhoz tartozik egy feltétel a lineáris programozási feladatban, így a játékosok számában exponenciálisan sok feltételt kell az egyes lineáris programozási feladatokban megadni.

Mivel általános esetben maga a játék leírása (koalíciók száma) exponenciális függvénye a játékosok számának, ezért nem lehet úgy fejleszteni az algoritmust, hogy az a játékosok számában polinomiális legyen. Ugyanakkor, speciális játékosztályokon, és speciális esetekben nincs szükség a játék teljes leírására, azaz, nincs szükség minden koalíció értékét figyelembe venni a (pre)nukleolusz számítása során. Amennyiben egy játékban a figyelembe veendő koalíciók száma a játékosok számának polinomiális függvényére redukálható, akkor a (pre)nukleolusz számítása polinomiális bonyolultságú. Ezért fontos annak vizsgálata, hogy melyik koalíciók „lényegesek” a (pre)nukleolusz számítása során.

Huberman [5] megmutatta, hogy kiegyensúlyozott játékok esetén a nukleolusz kiszámításához nincs szükség a nem lényeges koalíciókra. Huberman eredménye több esetben jelentősen megkönnyíti a nukleolusz kiszámítását; pl. Huberman eredményének következménye, hogy a hozzárendelési játékok [11] nukleoluszának kiszámítása polinomális bonyolultságú.

Huberman eredményét azóta többen továbbfejlesztették, lsd. pl. Granot et al [4], Solymosi és Sziklai [13], Solymosi [12], de legjobb tudomásunk szerint nincs még eredmény Huberman eredményének nem kiegyensúlyozott játékokra való kiterjesztésére. Mi okozza, hogy a lényeges koalíciók csak a kiegyensúlyozott játékokban elegendőek a nukleolusz kiszámításához, és hogyan lehetne módosítani ezt a fogalmat úgy, hogy az nem kiegyensúlyozott játékok esetén is használható legyen? Ez a témája cikkünknek.

Ebben a cikkben bevezetünk két, egymástól független általánosítását a lényeges koalíció fogalmának, a szűken lényeges és az elsőrendben lényeges koalíciók fogalmát. Megmutatjuk, hogy mindkét fogalom a prenukleolusz egy-egy karakterizációs osztályát adja tetszőleges játékok esetén, azaz, tetszőleges játék esetén a prenukleolusz kiszámításához elég a szűken lényeges koalíciókra, vagy elég az első rendben lényeges koalíciókra támaszkodni. Mindkét fogalom esetében azt használjuk ki, hogy ellentétben a maggal, a szűkmag sohasem üres, és a szűkmaghoz rendelhető úgy egy játék, hogy a prenukleolusz a szűkmaghoz rendelt játék prenukleolusza. A két, egymástól független új lényegesség fogalom két különböző, a szűkmaghoz tartozó játékot definiál, ebben térnek el egymástól.

A cikkben először ismertetjük azokat az alapvető játékelméleti fogalmakat amelyek a cikk olvasásához szükségesek, majd kitérünk a prenukleolusz kiszámításához használt lineáris programozási feladatokra (3. fejezet). Ezután (4. fejezet) bemutatjuk a két új fogalmunkat, és bizonyítjuk az azokhoz tartozó karakterizációs tételeket. Az 5. fejezetben két példa segítségével szemléltetjük a két új fogalom függetlenségét, és egy további példa azt mutatja meg, hogy a szűken lényegesség fogalom a lényegesség fogalmának általánosítása a kiegyensúlyozott játékok osztályán is. Az utolsó fejezetben röviden összefoglaljuk eredményeinket.

2. Játékelméleti alapfogalmak

Adott N a játékosok nemüres, véges halmaza, és $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény (koalíciós függvény), amire $v(\emptyset) = 0$; ekkor v-t TU-*játék*nak nevezzük (továbbiakban játék). Az N játékoshalmazzal rendelkező játékok osztályát jelölje $\mathcal{G}^N$. Jelölje $\mathcal{P}^*(N) := \{S \subseteq N\colon S \neq \emptyset, S \neq N\}$ az összes koalíció halmazát az N játékoshalmazon az üres és a nagykoalíció kivételével, és jelölje $\mathcal{D}_S$ az $S \subseteq N$ koalíció partícióinak osztályát $\{S\}$ kivételével.

Egy ψ halmazértékű leképezés az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztályon *megoldás*, ha tetszőleges $v \in A$ játékra, $\psi(v) \subseteq \mathbb{R}^N$. A ψ megoldás az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztályon *érték*, ha tetszőleges $v \in A$ játékra $|\psi(v)| = 1$, azaz, ha ψ szingleton értékű.

Jelölje $I^*(v) := \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i\in N} x_i = v(N)\}$ és $I(v) := \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i\in N} x_i = v(N)$ és $x_i \geq v(\{i\})\ \forall\ i \in N\}$ rendre a $v \in \mathcal{G}^N$ játék *preimputáció*inak és *imputáció*inak halmazát. Vegyük észre, hogy a preimputációk halmaza tetszőleges játék esetén nem üres.

Egy adott $v \in \mathcal{G}^N$ játékban az $S \subseteq N$ koalíciónak az $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetésnél vett *többlet*e: $e(S, x) := v(S) - x(S)$, ahol $x(S) := \sum_{i\in S} x_i$.

Az úgynevezett *többlet vektor* $E(x) = [\cdots \geq e(S, x) \geq \cdots : S \in \mathcal{P}^*(N)] \in \mathbb{R}^{2^{|N|}-2}$, egy olyan $2^{|N|} - 2$ dimenziós vektor, aminek a komponensei az adott $v \in \mathcal{G}^N$ játékban az x kifizetés mellett az $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalíciókhoz tartozó többletek nemnövekvő sorrendbe rendezve.

A *lexikografikus rendezés* $x, y \in \mathbb{R}^n$ között a következő: $x \leq_L y$, ha $\exists k$, hogy $x_i = y_i$ $i = 1, 2, \ldots, k-1$ és $x_k < y_k$, vagy $x = y$.

A $v \in \mathcal{G}^N$ játék *prenukleolusz*a [8] a preimputációk azon halmaza, amelynek elemei a preimputációk között lexikografikusan minimalizálják a nemnövekvő sorrendbe rendezett többletek vektorát, azaz

$$Nu^*(v) = \{x \in I^*(v) : E(x) \leq_L E(y)\ \forall y \in I^*(v)\}.$$

A $v \in \mathcal{G}^N$ játék *nukleolusz*a az imputációk azon halmaza, amelynek elemei az imputációk között lexikografikusan minimalizálják a nemnövekvő sorrendbe rendezett többletek vektorát, azaz

$$Nu(v) = \{x \in I(v) : E(x) \leq_L E(y)\ \forall y \in I(v)\}.$$

A prenukleolusz és a nukleolusz alapgondolata az, hogy szeretnénk elérni, hogy az x kifizetéssel legrosszabbul járó S koalíció a legkevésbé járjon rosszul. Majd ugyanezt megtesszük azzal a koalícióval, amelyik a második legrosszabbul jár, és így tovább.

Fontos még itt megjegyeznünk, hogy a prenukleolusz minden játékhoz egyetlen preimputációt rendel, így ez egy érték, és, ha a játék imputációinak halmaza nem üres, akkor a nukleolusz is egyetlen imputációt rendel a játékhoz [8]. Viszont mivel egy játék imputációinak halmaza lehet üres, ezért a nukleolusz az összes játék osztályán nem érték, hanem megoldás.

Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék magja [3, 10] a hatékony és koalíciósan racionális kifizetésvektorok halmaza, azaz

$$\text{core}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \colon \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ és } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ minden } S \subseteq N\text{-re} \right\}.$$

Magyarán szólva, a mag olyan kifizetésvektorok halmaza, amelyek úgy osztják fel az N nagykoalíció $v(N)$ értékét a játékosok között (hatékonyság), hogy minden $S \subseteq N$ koalícióra a koalícióbeli játékosok együtt nem kapnak kevesebbet a koalíció értékénél (koalíciós racionalitás), vagyis olyan kifizetésvektorokról beszélünk, amelyek mellett minden koalíció elégedett lehet, abban az értelemben, hogy a többletük nem nagyobb, mint 0. Mivel a mag nem feltétlenül egy kifizetésvektort rendel egy v játékhoz, a mag egy megoldás.

Egy játék *kiegyensúlyozott*, ha a magja nem üres. Ismert, hogy kiegyensúlyozott játékok esetén a prenukleolusz és a nukleolusz megegyezik.

A $v \in \mathcal{G}^N$ játék ε-*mag*ja a preimputációk azon részhalmaza, melyek esetén bármely $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalícióra $e(S, x) \leq \varepsilon$, azaz

$$\text{core}_\varepsilon(v) = \left\{ x \in I^*(v) \colon \max_{S \in \mathcal{P}^*(N)} e(S, x) \leq \varepsilon \right\}.$$

Vegyük észre, hogy a mag megegyezik a 0-maggal.

A $v \in \mathcal{G}^N$ játék *szűkmag*ja a legszűkebb nemüres ε-magja, azaz az összes nemüres ε-mag metszete. Jelölje

$$\varepsilon^* := \min_{\mathrm{core}_\varepsilon(v) \neq \emptyset} \varepsilon$$

a minimális nemüres ε-maghoz tartozó valós számot. Ekkor a szűkmag megegyezik $\mathrm{core}_{\varepsilon^*}$-gal.

Ellentétben a maggal, a szűkmag sohasem üres, ezért a szűkmaggal dolgozva kikerülhetjük a problémát, amit Huberman [5] tételében (4.1. Tétel) a mag üressége okoz.

3. A prenukleolusz kiszámítása

Ebben a fejezetben áttekintjük a *lexikografikus közép eljárás*t [6, 7] – pontosabban annak egy Huberman [5] általi módosítását – aminek ismeretére a későbbiek során szükségünk lesz.

Rögzítsük a $v \in \mathcal{G}^N$ játékot, és tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{array}{ll} & t \to \min \\ \text{f.h.} & e(S,x) \leq t, \qquad S \in \mathcal{P}^*(N) \\ & x \in I^*(v) \\ & t \in \mathbb{R} \end{array} \tag{1}$$

Könnyen látható, hogy az (1) feladatnak van optimális megoldása, és jelölje t_1 az (1) feladat optimumát. Legyen továbbá

$$X_1 = \{x \in I^*(v) \colon e(S,x) \leq t_1,\ \forall S \in \mathcal{P}^*(N)\}.$$

Jelölje W_1 az (1) feladatban a *fix halmaz*t, azaz legyen

$$W_1 = \{S \in \mathcal{P}^*(N) \colon \exists c_S \in \mathbb{R},\ \text{hogy } e(S,x) = c_S,\ \forall x \in X_1\}.$$

Legyen $k \geq 2$, és tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{array}{ll} & t \to \min \\ \text{f.h.} & e(S,x) \leq t, \qquad S \in \mathcal{P}^*(N) \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r) \\ & x \in X_{k-1} \\ & t \in \mathbb{R} \end{array} \tag{2}$$

Könnyen látható, hogy a (2) feladatnak van optimális megoldása, és jelölje t_k a (2) feladat optimumát. Legyen továbbá

$$X_k = \{x \in X_{k-1} \colon e(S,x) \leq t_k,\ \forall S \in \mathcal{P}^*(N) \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r)\}.$$

Jelölje W_k a (2) feladatban a fix halmazt, azaz legyen

$$W_k = \{S \in \mathcal{P}^*(N) \colon \exists c_S \in \mathbb{R},\ \text{hogy}\ e(S,x) = c_S,\ \forall x \in X_k\}.$$

Könnyen látható, hogy $t_k \geq t_{k+1}$, $X_k \supseteq X_{k+1}$ minden k-ra, és létezik k^*, hogy minden $l \geq k^*$-ra $X_l = X_{k^*}$.

Kopelowitz [6], Maschler et al [7] bizonyították, hogy a fenti eljárás, azaz a lexikografikus közép eljárás – pontosabban a fenti eljárás a lexikografikus közép eljárás egy Huberman [5] általi módosítása, ami lényegi eltérést az eredeti eljáráshoz képest nem jelent – a prenukleoluszt adja eredményül, azaz Kopelowitz [6], Maschler et al [7] bizonyították a következő állítást:

3.1. Tétel. *$Nu^*(v) = X_{k^*}$.*

4. Huberman eredményének általánosítása

Ebben a fejezetben ismertetjük eredményeinket. Először áttekintjük Huberman [5] eredményeit. Huberman tételének (ld. 4.1. Tétel) kimondásához először a lényeges koalíciók fogalmát kell definiálnunk.

4.1. Definíció. Adott egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék. Egy $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalíciót *lényeges*nek mondunk, ha S szingleton, azaz $|S| = 1$, vagy

$$v(S) > \max_{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S} \sum_{T \in \mathcal{B}} v(T).$$

Jelölje $\mathcal{E}_v$ a v játék lényeges koalícióinak osztályát.

4.1. Tétel. (Huberman-tétel [5]) *Adott egy $v \in \mathcal{G}^N$ kiegyensúlyozott játék, és legyen*

$$Y_1 = \{x \in I^*(v) \colon e(S,x) \leq t_1,\ \forall S \in \mathcal{E}_v\},$$

továbbá, $k \geq 2$-re legyen

$$Y_k = \{x \in X_{k-1} \colon e(S,x) \leq t_k,\ \forall S \in \mathcal{E}_v \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r)\}.$$

Ekkor $X_k = Y_k$ minden k-ra.

Tehát a tétel azt mondja, hogy kiegyensúlyozott játékok esetén a nukleolusz számításához nincs szükségünk a nem lényeges koalíciókra, azaz csupán a lényeges koalíciókhoz tartozó feltételek használatával felírva az (1) és a (2) lineáris programozási feladatokat a kapott végeredmény ugyanaz lesz, sőt minden egyes iterációban is megegyezik a kapott kifizetések halmaza azzal a halmazzal, amit az összes koalícióhoz tartozó feltétel használatával kapunk a lineáris programozási feladatok megoldása során.

A következő példa azt szemlélteti, hogy mi történik akkor, ha a mag üres.

4.1. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ és

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 1 \text{ vagy } S = \{1,2\}, \\ 4, & \text{ha } S = \{1,3\}, \\ -1, & \text{ha } S = \{2,3\}, \\ 2, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Ekkor $t_1 = 1 > 0$, azaz a mag üres. A lényeges koalíciók a következőek: $\mathcal{E}_v = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\}$, a játék prenukleolusza $(2, -1, 1)$, míg ha csak a lényeges koalíciókhoz tartozó egyenlőtlenségeket figyelembe véve számoljuk a „prenukleoluszt”, akkor $(\frac{3}{2}, -1, \frac{3}{2})$-et kapunk. Az első eltérés a második iterációban látható. Ha csak a lényeges koalíciókkal számolunk, akkor $t'_1 = 1$ és $t'_2 = -\frac{3}{2}$, míg $t_2 = -1$. Megfigyelhető, hogy csak a lényeges koalíciók ismeretében az 1-es és a 3-as játékosok felcserélhetőek, míg az eredeti játékban nem azok.

Közelebbről megvizsgálva a játékot azt látjuk, hogy az $\{1, 2\}$ koalíció okozza a problémát. Az $\{1, 2\}$ koalíció nem lényeges, de fontos abból a szempontból, hogy a t_1-magban (szűkmag) nem redundáns az 1-es és 2-es játékosok minimális kifizetése szempontjából. Másképpen fogalmazva, mivel $t_1 = 1$, ezért $v(\{1\}) = 0$ miatt az 1-es játékosnak legalább -1 kifizetést kell kapnia, mivel $v(\{2\}) = 0$, ezért a 2-es játékosnak legalább -1 kifizetést kell kapnia, de mivel $v(\{1, 2\}) = 0$, ezért az 1-es és 2-es játékosoknak együtt legalább -1 kifizetést kell kapniuk, ami nagyobb, mint $(-1) + (-1)$.

Cikkünk alapgondolata, hogy a lényegesség definíciójának módosításával, koalíciók olyan osztályát kapjuk, ami tartalmazza az olyan látszólag nem „lényeges” koalíciókat, mint a fenti példában az $\{1, 2\}$ koalíció. Fontos megjegyeznünk, hogy kiegyensúlyozott játékok esetén a prenukleolusz és a nukleolusz egybeesik, viszont nem kiegyensúlyozott játékok esetén nem feltétlenül, így a tétel általánosításakor már fontos megkülönböztetni, hogy mikor dolgozunk a nukleolusszal, és mikor a prenukleolusszal. Mi ebben a cikkben az általánosítást a prenukleoluszra mondjuk ki.

A következő alfejezetekben ismertetjük fő eredményeinket, ami két egymástól független általánosítása a lényeges koalíciók fogalmának és Huberman tételének (ld. 4.1. Tétel).

4.1. Szűken lényeges koalíciók

Az első vizsgált általánosítása a lényeges koalíciók fogalmának a *szűken lényeges* koalíciók fogalma. A definíció alapgondolata, hogy a játék szűkmagja sosem üres, így ha $\mathrm{core}_{\varepsilon^*}$ jelöli a szűkmagot, akkor a koalíciók értékeit ε^*-gal eltolva egy olyan játékot kapunk, aminek a magja nem üres, így igaz lesz rá a Huberman–tétel (ld. 4.1. Tétel). Vegyük észre, hogy $\varepsilon^* = t_1$, mivel mind a kettő az (1) lineáris programozási feladat optimuma.

4.2. Példa. A 4.1. Példát folytatva megfigyelhetjük, hogy mivel a lényeges koalíciók az $\mathcal{E}_v = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,3\}\}$ koalíciók, ezért csak ezekkel számolva a prenukleoluszban nem lesz különbség az egyes és a hármas játékosokhoz rendelt értékek között, míg a prenukleoluszban, ami $(2,-1,1)$, egyértelműen különböző értékek tartoznak hozzájuk. Ebből arra következtethetünk, hogy az $\{1,2\}$ koalíció fontos a prenukleolusz számítása szempontjából.

A mag nem üressége esetén tudjuk, hogy az egyes koalíciók legalább annyit kapnak a prenukleoluszban, amennyi az értékük, mivel a prenukleolusz magbeli. A mag üressége esetén ez nyilván nem valósítható meg, de azt tudjuk, hogy a prenukleolusz a szűkmag eleme. Mivel $t_1 = 1$, így a szűkmag megegyezik a játék 1-magjával. Emiatt annyit tudunk, hogy az $S \subseteq N$ koalíciók a prenukleoluszban legalább $v(S)-1$-et fognak kapni. Így a fontosság megállapításánál is ezt az értéket érdemes figyelembe venni, és így számolva $v(\{1,2\}) - 1 = -1 > v(\{1\}) + v(\{2\}) - 2 = -2$ valóban fennáll, ami alapján látható, hogy az $\{1,2\}$ koalíció „lényeges” lesz ebben a játékban.

Tekintsük a szűken lényeges koalíciók definícióját:

4.2. Definíció. (Szűken lényegesség) Az $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalíció szűken lényeges, ha szingleton, azaz $|S| = 1$, vagy

$$v(S) - t_1 > \max_{\mathcal{B}\in\mathcal{D}_S} \sum_{T\in\mathcal{B}} (v(T) - t_1).$$

Jelölje $\mathcal{E}_v^s$ a v játék szűken lényeges koalícióinak osztályát.

Könnyen látható, hogy ha a vizsgált játék magja nem üres, azaz $t_1 \leq 0$, a fenti fogalom akkor is a lényegesség fogalom általánosítása. Magyarán szólva, ha egy kiegyensúlyozott játékban egy koalíció szűken lényeges, akkor lényeges, és van olyan kiegyensúlyozott játék, ahol van olyan lényeges koalíció, ami nem szűken lényeges (ld. 5.3. Példa).

A következőkben az alfejezet fő eredményének bizonyításában használt két segédtételt mondunk ki és bizonyítunk be.

4.1. Segédtétel. *Legyen $S \in \mathcal{P}^*(N)$ tetszőleges nem szűken lényeges koalíció. Ekkor létezik $\mathcal{B}^* \in \mathcal{D}_S$, hogy $v(S) - t_1 \leq \sum_{T\in\mathcal{B}^*}(v(T) - t_1)$ és $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{E}_v^s$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{B} = \{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S \colon v(S) - t_1 \leq \sum_{T \in \mathcal{B}}(v(T) - t_1)\}$, és legyen $\mathcal{B}^* \in \mathbf{B}$ olyan, hogy minden $\mathcal{B} \in \mathbf{B}$-re $|\mathcal{B}^*| \geq |\mathcal{B}|$.

Indirekt tegyük fel, hogy egy $T^* \in \mathcal{B}^*$ koalíció nem szűken lényeges. Ekkor létezik $\mathcal{B}' \in \mathcal{D}_{T^*}$, hogy $v(T^*) - t_1 \leq \sum_{T' \in \mathcal{B}'}(v(T') - t_1)$, azaz

$$v(S) - t_1 \leq \sum_{T' \in (\mathcal{B}^* \setminus \{T^*\}) \cup \mathcal{B}'} (v(T') - t_1),$$

és $|(\mathcal{B}^* \setminus \{T\}) \cup \mathcal{B}'| > |\mathcal{B}^*|$, ami ellentmondás. □

4.2. Segédtétel. *Legyen k tetszőleges pozitív egész, $S \in \mathcal{P}^*(N) \setminus \cup_{r=1}^{k-1} W_r$ tetszőleges koalíció, és $\mathcal{B}^* \in \mathcal{D}_S$. Ekkor létezik $T^* \in \mathcal{B}^*$, hogy $T^* \notin \cup_{r=1}^{k-1} W_r$.*

Bizonyítás. Ha $k = 1$, akkor $\cup_{r=1}^{k-1} W_r = \emptyset$, tehát $T^* \notin \cup_{r=1}^{k-1} W_r$.
Ha $k \geq 2$, akkor indirekt tegyük fel, hogy $\mathcal{B}^* \subseteq \cup_{r=1}^{k-1} W_r$. Ekkor minden $x \in X_{k-1}$-re

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{T \in \mathcal{B}^*} x(T) = v(S) - \sum_{T \in \mathcal{B}^*} (v(T) - c_T),$$

azaz minden $x, x' \in X_{k-1}$-re $e(S, x) = e(S, x')$, azaz $S \in \cup_{r=0}^{k-1} W_r$, ami ellentmondás. □

A következő tétel Huberman tételének általunk javasolt első általánosítása:

4.2. Tétel. (Huberman [5] általánosítása I.) *Adott egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék, és legyen*

$$Y_1^s = \{x \in I^*(v) \colon e(S, x) \leq t_1,\ \forall S \in \mathcal{E}_v^s\},$$

továbbá, $k \geq 2$-re legyen

$$Y_k^s = \{x \in X_{k-1} \colon e(S, x) \leq t_k,\ \forall S \in \mathcal{E}_v^s \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r)\}.$$

Ekkor $X_k = Y_k^s$ minden k-ra.

Bizonyítás. Az összehasonlított halmazok definíciójából következik, hogy $X_k \subseteq Y_k^s$ minden k-ra.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik k, hogy $X_k \not\supseteq Y_k^s$, azaz létezik $y^* \in Y_k^s$ és $S \in \mathcal{P}^*(N) \setminus (\mathcal{E}_v^s \cup (\cup_{r=1}^{k-1} W_r))$, hogy $e(S, y^*) > t_k$.

A 4.1. Lemma miatt létezik $\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S \cap \mathcal{E}_v^s$ szűken lényeges koalíciókból álló partíciója S-nek, hogy $v(S) - t_1 \leq \sum_{T \in \mathcal{B}}(v(T) - t_1)$.

Ekkor

$$
\begin{aligned}
v(S) - t_1 &\le \sum_{T\in\mathcal{B}} (v(T) - t_1) \\
v(S) - y^*(S) - t_1 &\le \sum_{T\in\mathcal{B}} (v(T) - y^*(T) - t_1) \\
e(S, y^*) - t_1 &\le \sum_{T\in\mathcal{B}} (e(T, y^*) - t_1)
\end{aligned}
$$

Mivel $y^* \in Y_k^s$, $e(T, y^*) \le t_1$ minden $T \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}_v^s$ esetén, így tetszőleges $T \in \mathcal{B}$ koalícióra $e(S, y^*) - t_1 \le e(T, y^*) - t_1$ fennáll. A 4.2. Lemma miatt létezik $T^* \in \mathcal{B}$, hogy $T^* \notin \cup_{r=1}^{k-1} W_r$. Emiatt $e(S, y^*) \le e(T^*, y^*) \le t_k$ teljesül, ami ellentmondás. □

Érdemes lehet megjegyezni, hogy a szűken lényegesség fogalmat (4.2. Definíció) definiálhatjuk t_1-gyel való eltolás helyett tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ konstanssal való eltolással is (a továbbiakban nevezzük ezt c-lényegességnek). Ekkor nyilván a t_1-lényeges koalíciók megegyeznek a szűken lényeges koalíciókkal. Könnyen látható, hogy ekkor tetszőleges $t_1 \le c$ esetén a 4.2. Tétel igaz marad szűken lényeges koalíciók helyett c-lényeges koalíciókat használva is. Természetesen minél nagyobb c konstanst választunk, annál több c-lényeges koalíciót kapunk, míg a célunk ezek számát minél inkább csökkenteni. Amennyiben viszont egy olyan játékunk van, ahol a szűkmag meghatározása nehéz, de ismerünk egy felső becslést t_1 értékére, akkor ez az eredmény segíthet lecsökkenteni a prenukleolusz kiszámításához szükséges koalíciók számát.

4.2. Első rendben lényeges koalíciók

Az általunk javasolt második lényegesség fogalom az *első rendben lényeges*ség. Az első rendben lényeges koalíció fogalmának háttérgondolata, hogy a szűkmagból kiindulva lehetséges a különböző koalíciók értékeit különböző nagyságokkal tologatni, és ezáltal kiszűrni a „lényeges” koalíciókat.

4.3. Példa. A 4.1. Példához visszatérve kiindulhatunk abból a megközelítésből, hogy a $v(S) > \max_{\mathcal{B}\in\mathcal{D}_S} \sum_{T\in\mathcal{B}} v(T)$ egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő kifejezés a mag üressége esetén túl magas, és a kérdés, hogy mennyivel kell csökkenteni ahhoz, hogy a „lényeges” koalíciókat megtarthassuk, de ne válasszunk a „lényeges” koalíciók közé „túl sok” koalíciót.

Jelölje $v_m(S)$ a szűkmag (az (1) lineáris programozási feladat) poliéderében a lehető legkisebb $x(S)$ értékeket, minden $S \subseteq N$ koalícióra. Ekkor $v_m(\{1\}) = 0$, $v_m(\{2\}) = -1$ és $v_m(\{3\}) = -1$. Amiből $v(\{1,2\}) = 0 > -1 = v_m(\{1\}) + v_m(\{2\})$, $v(\{1,3\}) = 4 > -1 = v_m(\{1\}) + v_m(\{3\})$ és $v(\{2,3\}) = -1 > -2 = v_m(\{2\}) + v_m(\{3\})$, azaz minden koalíció „lényeges”.

Az 5.2. Példában megmutatjuk, hogy ez a megközelítés nem feltétlenül határoz meg bővebb koalíció osztályt, mint a szűken lényeges koalíciók osztálya.

Legyen $S \in \mathcal{P}^*(N)$ és tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} & x(S) \to \min \\ \text{f.h.} \quad & e(T, x) \le t_1, \qquad T \in \mathcal{P}^*(N) \\ & x \in I^*(v) \end{aligned} \tag{3}$$

Könnyen látható, hogy a (3) feladatnak tetszőleges $S \in \mathcal{P}^*(N)$ esetében van optimális megoldása. Legyen $v_m(S)$ a fenti feladat optimuma, és legyen

$$v^*(S) = \min\{v_m(S), v(S)\}.$$

Tekintsük a második általunk javasolt lényegesség fogalom definicíóját:

4.3. Definíció. (Első rendben lényegesség) Egy $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalíció *első rendben lényeges*, ha S szingleton, azaz $|S| = 1$, vagy

$$v(S) > \max_{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S} \sum_{T \in \mathcal{B}} v^*(T).$$

Jelölje $\mathcal{E}_v^e$ a v játék első rendben lényeges koalícióinak osztályát.

A következőkben tekintsünk egy technikai eredményt, amelyre az alfejezet fő eredményének bizonyítása során lesz szükségünk:

4.3. Segédtétel. *Legyen $S \in \mathcal{P}^*(N)$ tetszőleges nem első rendben lényeges koalíció. Ekkor létezik $\mathcal{B}^* \in \mathcal{D}_S$, hogy $v(S) \le \sum_{T \in \mathcal{B}^*} v^*(T)$ és $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{E}_v^e$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{B} = \{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S \colon v(S) \le \sum_{T \in \mathcal{B}} v^*(T)\}$, és legyen $\mathcal{B}^* \in \mathbf{B}$ olyan, hogy minden $\mathcal{B} \in \mathbf{B}$-re $|\mathcal{B}^*| \ge |\mathcal{B}|$.

Tegyük fel, hogy egy $T \in \mathcal{B}^*$ koalíció nem első rendben lényeges. Ekkor létezik $\mathcal{B}' \in \mathcal{D}_T$, hogy $v(T) \le \sum_{T' \in \mathcal{B}'} v^*(T')$, azaz, mivel definíció szerint $v^*(T) \le v(T)$,

$$v(S) \le \sum_{T' \in (\mathcal{B}^* \setminus \{T\}) \cup \mathcal{B}'} v^*(T'),$$

és $|(\mathcal{B}^* \setminus \{T\}) \cup \mathcal{B}'| > |\mathcal{B}^*|$, ami ellentmondás. □

A következő tétel a második általunk javasolt általánosítása Huberman tételének:

4.3. Tétel. (Huberman [5] általánosítása II.) *Adott egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék, és legyen*

$$Y_1^e = \{x \in I^*(v) \colon e(S, x) \le t_1, \ \forall S \in \mathcal{E}_v^e\},$$

továbbá, $k \geq 2$-re legyen

$$Y_k^e = \{x \in X_{k-1} \colon e(S,x) \leq t_k,\ \forall S \in \mathcal{E}_v^e \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r)\}.$$

Ekkor $X_k = Y_k^e$ minden k-ra.

Bizonyítás. Az összehasonlított halmazok definíciójából következik, hogy $X_k \subseteq Y_k^e$ minden k-ra.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik k, hogy $X_k \not\supseteq Y_k^e$ azaz létezik $y^* \in Y_k^e$ és $S \in \mathcal{P}^*(N) \setminus (\mathcal{E}_v^e \cup (\cup_{r=1}^{k-1} W_r))$, hogy $e(S, y^*) > t_k$.

A 4.3. Lemmából következik, hogy létezik $\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S \cap \mathcal{E}_v^e$, hogy $v(S) \leq \sum_{T \in \mathcal{B}} v^*(T)$.

Ekkor

$$\begin{aligned} v(S) &\leq \sum_{T \in \mathcal{B}} v^*(T) \\ v(S) - y^*(S) &\leq \sum_{T \in \mathcal{B}} (v^*(T) - y^*(T)) \\ e(S, y^*) &\leq \sum_{T \in \mathcal{B}} (v^*(T) - y^*(T)). \end{aligned}$$

Mivel v^* definíciója miatt $v^*(T) - y^*(T) \leq 0$ minden $T \in \mathcal{B}$ esetén, így tetszőleges $T \in \mathcal{B}$ koalícióra $e(S, y^*) \leq v^*(T) - y^*(T)$ fennáll. A 4.2. Lemma miatt létezik $T^* \in \mathcal{B}$, hogy $T^* \notin \cup_{r=1}^{k-1} W_r$, emiatt

$$e(S, y^*) \leq v^*(T^*) - y^*(T^*) \leq t_k,$$

ami ellentmondás. $\square$

5. A két új lényegesség fogalom összehasonlítása

A 4.2. és a 4.3. Definíciókban foglalt lényegesség fogalom között semmilyen irányú tartalmazás nem áll fenn, egymástól függetlenek. Ezt a következő példákon szemléltetjük:

5.1. Példa. (Nem minden első rendben lényeges koalíció szűken lényeges)
Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ és

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 1, \\ -\frac{1}{2}, & \text{ha } S = \{1,2\}, \\ -2, & \text{ha } |S| = 2, S \neq \{1,2\}, \\ -1, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Ebben a játékban $t_1 = \frac{1}{3}$. A szűken lényeges koalíciók (4.2. Definíció): $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$. Az $S = \{1,2\}$ koalíció esetén

$$v(\{1,2\}) - t_1 = -\frac{5}{6} \leq -\frac{4}{6} = v(\{1\}) + v(\{2\}) - 2t_1.$$

Az első rendben lényeges koalíciók (4.3. Definíció): $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\}\}$. Megfigyelhető, hogy ebben a játékban a szűkmag egy elemű, vagyis csak a $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ pontot tartalmazza, ami egyben a prenukleolusz is, így $v_m(\{i\}) = -\frac{1}{3}$ minden $i \in N$ esetén. Tehát az $S = \{1,2\}$ koalíció esetén

$$v(\{1,2\}) = -\frac{1}{2} > -\frac{2}{3} = v^*(\{1\}) + v^*(\{2\}).$$

Így ebben a játékban az $\{1,2\}$ koalíció nem szűken lényeges, de elsőrendben lényeges.

Érdemes megjegyezni, hogy mivel az imputációk halmaza üres, ennek a játéknak nincs nukleolusza.

5.2. Példa. (Nem minden szűken lényeges koalíció első rendben lényeges)
Legyen $N = \{1,2,3,4\}$ és

$$v(S) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & \text{ha } |S| = 3, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ebben a játékban $t_1 = \frac{3}{4}$. A szűken lényeges koalíciók (4.2. definíció): $\mathcal{P}^*(N)$. Világos, hogy az $|S| = 3$ koalíciók szűken lényegesek. Az $|S| = 2$, $S = i,j$ koalíciók esetén

$$v(S) - t_1 = -\frac{3}{4} > -\frac{3}{2} = v(\{i\}) + v(\{j\}) - 2t_1.$$

Az első rendben lényeges koalíciók (4.3. Definíció): $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$. A szűkmag itt egy elemű, csak a $(0,0,0,0)$ kifizetés vektort tartalmazza, ami egyben a prenukleolusz is, így $v_m(S) = 0$ minden $S \in \mathcal{P}^*(N)$ esetén , tehát $v^*(S) = 0$ minden $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalícióra. Emiatt világos, hogy az $|S| = 3$ koalíciók első rendben lényegesek. Az $|S| = 2, S = \{i,j\}$ koalíciók esetén pedig

$$v(S) = 0 = v^*(\{i\}) + v^*(\{j\}).$$

Tehát ebben a játékban az $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$ koalíciók nem első rendben lényegesek, de szűken lényegesek.

A fenti két példából látható, hogy a szűken lényeges és az első rendben lényeges koalíciók osztályai között semmilyen irányú tartalmazás nincs, így egyik fogalom sem erősebb vagy gyengébb a másiknál.

A következő példa azt mutatja, hogy a szűken lényegesség általánosítása a lényegesség fogalomnak a kiegyensúlyozott játékok osztályán.

5.3. Példa. (Nem minden lényeges koalíció szűken lényeges) Legyen $N = \{1,2,3\}$ és

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 1, \\ 1, & \text{ha } |S| = 2, \\ 9, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Először is vegyük észre, hogy minden koalíció (kivéve az üres és nagykoalíciót) lényeges.

Ebben a játékban $t_1 = -3$. A szűken lényeges koalíciók (4.2. Definíció) a szingletonok. Ha $S = \{i, j\}$, $i \neq j$, akkor

$$v(S) - t_1 = 4 < 6 = v(\{i\}) + v(\{j\}) - 2t_1.$$

Tehát a két elemű koalíciók nem szűken lényegesek, de lényegesek.

Megfigyelhető továbbá, hogy a játék szűkmagja egy elemű, csak a $(3,3,3)$ kifizetést tartalmazza, ami egyben a prenukleolusz is, ami itt megegyezik a nukleolusszal is.

6. Összefoglalás

Cikkünkben a lényeges koalíció fogalmának két különböző általánosítását vezettük be. Bizonyítottuk továbbá, hogy mindkét új lényegesség fogalom – a szűken lényegesség és az első rendben lényegesség – a prenukleolusz két különböző karakterizációs osztályát határozza meg tetszőleges – nem csak kiegyensúlyozott – játékok esetén.

Két példán keresztül szemléltettük, hogy a két általánosított lényegesség fogalom független egymástól. Cikkünk nyitva hagyta azt a kérdést, hogy a két karakterizációs osztály metszete is karakterizációs osztály-e. További kutatási irány a cikkbeli eredmények kiterjesztése korlátozott kooperációval rendelkező játékokra.

Megjegyezzük, hogy az általunk bevezetett új lényegesség fogalmak nagyon könnyen átírhatóak a nukleolusznak megfelelő formába.

Köszönetnyilvánítás

A jelen publikációban megjelenő kutatások az Innovációs és Technológiai Minisztérium Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott TKP2020 Nemzeti Kihívások Alprogram támogatásával, a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal által kibocsátott támogatói okirat alapján valósultak meg (projekt azonosító: TKP2020 BME-NKA).

A szerzők köszönik az NKFI (K119930) támogatását.

References

[1] R.J. Aumann and M. Maschler: *Advances in Game Theory*, Princeton University Press, chap The Bargaining Set for Cooperative Games, in Annals of Mathematical Studies, Vol. **52**, pp. 443–476 (1964). DOI: 10.1515/9781400882014-022

[2] M. Davis and M. Maschler: *The kernel of a cooperative game*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. **12** No. **3**, pp. 223–259 (1965). DOI: 10.1002/nav.3800120303

[3] D.B. Gillies: *Solutions to general non-zero-sum games*, Contributions to the Theory of Games, Princeton University Press, Vol. **IV** (1959). DOI: 10.1515/9781400882168-005

[4] D. Granot, F. Granot and W.R. Zhu: *Characterization sets for the nucleolus*, International Journal of Game Theory, Vol. **27** No. **27**, pp. 359–374 (1998). DOI: 10.1007/s001820050078

[5] G. Huberman: *The nucleolus and the essential coalitions*, In: A. Bensoussan and J. Lions (eds) Analysis and Optimization of Systems, Proceedings of the Fourth International Conference, Versailles, Springer, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. **28**, pp. 416–422, (1980). DOI: 10.1007/BFb0004057

[6] A. Kopelowitz: *Computation of the kernels of simple games and the nucleolus of n-person games*, rM-31, Mathematics Department, The Hebrew University of Jerusalem, (1967).

[7] M. Maschler, B. Peleg and L.S. Shapley: *Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts*, Mathematics of Operations Research, Vol. **4** No. **4**, pp. 303–338 (1979). DOI: 10.1287/moor.4.4.303

[8] D. Schmeidler: *The Nucleolus of a Characteristic Function Game*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. **17**, pp. 1163–1170 (1969). DOI: 10.1137/0117107

[9] L.S. Shapley: *A value for n-person games*, In: H.W. Kuhn and A.W Tucker (eds) Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, Vol. **28**, pp. 307–317 (1953). DOI: 10.1515/9781400881970-018

[10] L.S. Shapley: *Markets as Cooperative Games*, Tech. rep., Rand Corporation, (1955).

[11] L.S. Shapley and M. Shubik: *The assignment game I: the core*, International Journal of Game Theory, Vol. **1**, pp. 111–130 (1972). DOI: 10.1007/BF01753437

[12] T. Solymosi: *Weighted nucleoli and dually essential coalitions*, International Journal of Game Theory, Vol. **48**, pp. 1087–1109 (2019). DOI: 10.1007/s00182-019-00689-x

[13] T. Solymosi and B. Sziklai: *Characterization sets for the nucleolus in balanced games*, Operation Research Letters, Vol. **44** No. **4**, pp. 520–524 (2016). DOI: 10.1016/j.orl.2016.05.014

Dornai Zsófia 1995-ben született Budapesten. BSc tanulmányait a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Karának matematika szakán végezte, majd ugyanitt 2020-ban szerzett Alkalmazott matematikus MSc diplomát operációkutatás specializáción. Jelenleg ugyanott, a Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolában másodéves PhD hallgató, Pintér Miklós témavezetésével. Fő kutatási területe a játékelmélet, elsősorban kooperatív játékokkal foglalkozik.

DORNAI ZSÓFIA
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Matematika Intézet
dornaizs@math.bme.hu

Pintér Miklós a Budapesti Corvinus Egyetemen a Corvinus Center for Operations Research kutatóközpontban dolgozik. Fő kutatási területei: döntéselmélet, játékelmélet, matematikai közgazdaságtan és operációkutatás. Jelenleg a Magyar Operációkutatási Társaság elnöke.

PINTÉR MIKLÓS
Budapesti Corvinus Egyetem,
Corvinus Center for Operations Research
pmiklos@uni-corvinus.hu

ESSENTIAL COALITIONS FOR NON-BALANCED GAMES

Zsófia Dornai, Miklós Pintér

The prenucleolus of transferable utility cooperative games (games for short) are considered. Applying a result by Huberman [5] one can reduce significantly the number of coalitions needed for computing the prenucleolus on balanced games, meaning a corollary of the above mentioned result is that one can show that the computation of the prenucleolus is easy on some subclasses of games. However, the result in [5] works only for balanced games.

In this paper we give two generalizations of the result in [5]. Both generalizations are based on generalizations of the notion of essential coalition which the result in [5] result is based on. The two generalizations are independent from each other, both work for non-balanced games too, and both generalize the result in [5] even on balanced games.