Alkalmazott Matematikai Lapok **39** (2022), 1–18.
DOI: xxx

KASSAY GÁBOR TUDOMÁNYOS TEVÉKENYSÉGÉRŐL

KOLUMBÁN JÓZSEF

Kassay Gábor tudományos tevékenysége a nemlineáris analízis következő fejezeteivel kapcsolatos: egyensúly-feladatok, numerikus módszerek monoton halmazértékű függvényekkel adott inkluziók közelítő megoldására, normálstruktúrával rendelkező Banach-terek és konvexitási struktúrák. Célom Kassay Gábor eredményeinek vázlatos ismertetése, inkább a tárgyalt kérdések kapcsolatait tartva szem előtt, mint a dolgozatok elemzését. Dolgozatainak idézésekor az e cikket követő ...-... oldalakon található. Kása Zoltán által készített publikációs jegyzéket használom az ottani csillagos számozás szerint.

1. A Tiberiu Popoviciu-szeminárium

A múlt század 70-es éveitől kezdve Romániában a gazdasági élet egyre súlyosabbá vált. Ennek következtében évről-évre kevesebb pénz jutott az oktatásra is. Az egyetemen, például, minden fejlesztést leállítottak, bér- és létszámstopot rendeltek el, a szakkönyvtárakban a nyugati folyóiratok megrendelését a minimum alá csökkentették, stb. A tudomány emberét különösen az utóbbi rendelkezések érintették fájdalmasan. A kitűnő szovjet matematikai iskola termékeihez olcsón hozzá lehetett jutni ugyan, de a világ más tájain megjelenő tekintélyes szakfolyóiratokat nem lehetett beszerezni. Ezért karunk matematikusai külföldi matematikai könyvtárakhoz folyamodtak segítségért. Legjobb dolgozataikat közlés végett nem küldték el külföldi lapkiadókhoz, hanem belőlük köteteket szerkesztettek, és azokat elküldték a külföldi könyvtáraknak, azzal a kötelezettség-vállalással, hogy a dolgozatokat máshol nem publikálják. Mi „csak” annyit kértünk, hogy ők helyettünk fizessenek elő az általunk megjelölt folyóiratokra. Az ötlet bevált, és így több éven át hozzájuthattunk sok – számunkra fontos – külföldi folyóirathoz.

Ilyen körülmények között, amikor Kassay Gábor befejezte egyetemi tanulmányait, bár szükség lett volna rá, egyelőre nem lehetett kinevezni az egyetemre. Ő viszont nem akart lemondani álmairól, hogy ne csak oktassa, hanem kutassa is a matematikát. Tanulmányi eredményei alapján sok jó középiskolai állás közül választhatott volna más városban, e helyett választott egy szerényebb kolozsvári iskolát, ami lehetővé tette az analízis tanszéken működő Tiberiu Popoviciu-szeminárium látogatását. Ezen a szemináriumon heti rendszerességgel találkoznak olyan kolozsvári matematikusok, akik függvényapproximáció és alkalmazott matematikai kutatások iránt érdeklődnek. A résztvevők beszámolókat tartanak saját eredményeikről vagy más szerzők fontos közleményeiről. Gabi számára ezeken az összejöveteleken elhangzott előadások jelentették a „posztgraduális képzést”.

Így vagy úgy, a Popoviciu-szemináriumon való résztvétel indukálta első másfél tucatnyi dolgozatát, amelyek nagy része a fent említett csereakció keretében összeállított kötetekben szerepel, de köztük van az első belföldi [∗2] és az első külföldi folyóiratban megjelent [∗6] dolgozata is. A [∗2] dolgozatra alább még visszatérünk. A [∗6] dolgozatban Gabi választ adott egy külföldi szerző eredményeinek bemutatása után kialakult eszmecserén megfogalmazott kérdésre.

Az említett kötetekben közölt dolgozatok közül itt csak a [∗17] dolgozatra térek ki, mert a benne tárgyalt kérdés kulcsszerepet játszik az egyensúlyelméletben. Knaster, Kuratowski és Mazurkiewicz 1929-ben, a róluk elnevezett KKM-lemma felhasználásával új bizonyítást adtak Brouwer fixponttételére. Ez a lemma a következőt állítja. Legyenek $u_1, \dots, u_n$ valamely véges dimenziós valós normált E tér rögzített elemei, és a zárt $C_i \subseteq E$ $(i = 1, \dots, m)$ részhalmazok rendelkezzenek azzal a tulajdonsággal, hogy minden $k \leq n$ pozitív természetes szám és minden $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ esetén az $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ konvex burkolója benne van a $C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_k}$ halmazban. Ekkor $C_1 \cap \dots \cap C_m \neq \emptyset$.

1961-ben Ky Fan a KKM-lemmát a következőképpen általánosította végtelen dimenziós terekre. Legyen E valós Hausdorff topologikus vektortér és X nemüres részhalmaza E-nek. Azt mondjuk, hogy a $F : X \to 2^E$ halmazértékű függvény végesen zárt, ha $F(x) \cap L$ az euklidészi topológia szerint zárt, minden $x \in X$ és E minden véges dimenziós L altere esetén. A F függvény KKM-tulajdonságú, ha X minden $\{x_1, \dots, x_n\}$ véges részhalmazának konvex burkolója részhalmaza az $F(x_1) \cup \dots \cup F(x_n)$ halmaznak. Ky Fan [10] szerint, ha F értékei zárt halmazok, és létezik olyan $\overline{x} \in X$, hogy $F(\overline{x})$ kompakt, akkor a KKM-tulajdonságból következik, hogy az $F(x)$ halmazok keresztmetszete nem üres. Következésképpen, ebben az esetben, a KKM-tulajdonságból következik a végesmetszet-tulajdonság, vagyis az $F(x_1), \dots, F(x_n)$ halmazoknak van közös pontja, minden $x_1, \dots, x_n \in X$ esetén. Nem nehéz igazolni, hogy ennek az állításnak a fordítottja nem igaz, ha $E = \mathbb{R}$ (lásd [∗92], Example 3.1). Felmerül tehát a kérdés: hogyan lehetne jellemezni a végesmetszet-tulajdonságot? A [∗17] dolgozat a KKM-tulajdonság megfelelő általánosításával választ ad erre a kérdésre.

Legyen X tetszőleges nemüres halmaz és E valós Hausdorff topológikus vektortér. Értelmezés szerint, az $F : X \to 2^E$ függvény általánosított KKM-tulajdonságú, ha X minden nemüres $\{x_1, \dots, x_n\}$ véges részhalmazához hozzá lehet rendelni az E olyan nemüres $\{y_1, \dots, y_n\}$ részhalmazát, amelyre minden $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}\}$ részhalmaz konvex burkolója részhalmaza a $F(x_{i_1}), \dots, F(x_{i_k})$ halmazok egyesítésének. A [∗17] dolgozat szerint ez a tulajdonság egyenértékű a végesmetszet-tulajdonsággal, ha F értékei végesen zártak. Érdekes, hogy ez az állítás szerepel az egy évvel később megjelent [7] dolgozatban is, viszont [∗17] említése nélkül. Később, egyensúly-feladatok tárgyalásánál több szerző használta az általánosított KKM-tulajdonság fogalmát és a vele kapcsolatos végesmetszet-tételt, hivatkozva a [∗17] dolgozatra is (lásd például [36]).

2. A minimax tételektől az egyensúlyfeladatokig

Kassay Gábor 1994-ben megvédett doktori (PhD) disszertációjának címe: *Új eredmények a minimax elméletben, alkalmazva variációs egyenlőtlenségekre és optimalizálási feladatokra.* Pályafutása során az ilyen típusú feladatokat magába foglaló *egyensúlyelmélet* volt figyelmének középpontjában. Az egyensúlyelmélet ma a nemlineáris analízis egyik legjelentősebb ága, gyakorlati és elméleti szempontból egyaránt. Magába foglalja, többek között, az optimalizálás, a minimax, a Nash-egyensúly, a komplementaritás, a fixpont és a variációs egyenlőtlenségekre vonatkozó feladatokat. Mivel az egyensúlyfeladat fogalma és elmélete a játékelméletből sarjadzott ki, célszerű néhány szóban erre kitérni.

Az első játékelméleti cikket a modern halmazelmélet egyik megalapozója, Zermelo írta 1913-ban a sakkjáték matematikájáról. Emile Borel, 1921 és 1927 között, három rövid jegyzetben foglalkozott először a kétszemélyes, nulla összegű játékok matematikai modellezésével, ahol az egyik játékos nyeresége a másik vesztesége: $f_1(s_1, s_2) = -f_2(s_1, s_2)$, minden (s_1, s_2) stratégiapárra, ahol f_1 és f_2 a játékosok stratégiafüggvényei. Ez a feltétel teljesül a sakkban és a társasjátékok többségében (például a kártyajátékokban). A legegyszerűbb játék a „fej vagy írás”: mindkét játékos egyidejűleg letesz az asztalra egy 100 Ft-os érmét. Ha a letett érmék felső oldala ugyanolyan, akkor az 1. játékos elnyeri a 2. játékos érméjét; ha különbözők, akkor a 2. játékos nyeri el az 1. játékos érméjét. Fent említett jegyzeteiben Borel megfogalmazta az ilyen típusú játékok egyensúlyi megoldásának fogalmát. Ez a következőt jelenti: az 1. játékos bármilyen s_1 stratégiát választ, a $\min_{s_2 \in S_2} f_1(s_1, s_2)$ mennyiségnél többet nem kaphat, ha a 2. játékos vele szemben a legjobban játszik. Az 1. játékos ezt a mennyiséget akarja maximalizálni, azaz $\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} f_1(s_1, s_2)$ értéket akarja elérni, ahol S_1 és S_2 a játékosok stratégiahalmazai. Hasonlóan gondolkodik a 2. játékos is: az 1. játékos $\max_{s_1 \in S_1} f_1(s_1, s_2)$ maximális nyereményét akarja a minimumon tartani, azaz $\min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} f_1(s_1, s_2)$ értéket akar elérni. Ha teljesül a

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} f(s_1, s_2) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} f(s_1, s_2)$$

egyenlőség, ahol $f = f_1$, akkor azt mondjuk, hogy a minimax játékfeladatnak van megoldása.

A fej vagy írás játékban azonban nincs minimax megoldás, legalábbis az eredeti stratégiatérben. Ezen segít az ún. randomizálás, vagyis a kevert stratégiák alkalmazása. Például, az 1. játékos p valószínűséggel választ fejet és $1-p$ valószínűséggel írást, ellenben a 2. játékos, az 1. játékos választásától függetlenül, q valószínséggel választ fejet és $1-q$ valószínséggel írást. (Tudjuk, hogy a kevert stratégia hasznosságát már a XVIII. század elején ismerték.) Borel az előbbi egyszerű megfigyelést általánosítva, megfogalmazta a kevert stratégiájú minimax tételt (ahol a stratégiafüggvény bilineáris és a stratégiahalmazok szimplexek), de bizonyítást rá nem adott. Ezt a feladatot a berlini műegyetemen alkalmazott, 25 éves Neumann János (akkori nevén Johann von Neumann) oldotta meg abban az általánosabb esetben, amikor az f stratégiafüggvény s_1 szerinti felső és s_2 szerinti alsó nivóhalmazai konvex halmazok (mai szóhasználattal, s_1 szerint kvázikonkáv és s_2 szerint kvázikonvex). Rendkívül leleményes bizonyítása, amelyet német nyelven közölt a [31] dolgozatban, a teljes indukció módszerén alapul. Ugyanakkor közölt erről egy rövid, francia nyelvű [32] cikket is, de ebben csak a Borel-féle modellről van szó, ahol a stratégiafüggvény bilineáris, és bizonyítás nélkül kijelenti a minimax tételt. A [31] dolgozat csak 1959 után vált közismerté, amikor megjelent az angol nyelvű fordítása [35]. A matematikusok többsége számára ezután vált nyilvánvalóvá, hogy a kvázikonkáv és a kvázikonvex függvényeket elsőként Neumann János használta, anélkül, hogy nevet adott volna ezeknek a fogalmaknak.

Később, a náci Németországból menekülő Neumann János a princetoni Institute for Advanced Studiesban kapott állást. A harmincas évek második felében többször látogatott Bécsbe, ahol Oskar Morgenstern közgazdasági szimpóziumokat szervezett. Ezeken tevékenyen részt vett, többek között, a modern matematikai statisztika egyik megalapítója, a kolozsvári származású Wald Ábrahám is. Az egyik ilyen szimpóziumon Neumann János bemutatta a közgazdaságtan első növekedési modelljét [34], amely a Brouwer-féle fixponttételre alapult (1941-ben S. Kakutani, Neumann bizonyítását elemezve, fedezte fel a nevét viselő fixponttételt). Ebből az együttműködésből született a nagy hatású [33] könyv is. Ez a könyv hozzájárult ahhoz, hogy a második világháborút követő években az operációkutatás hatalmas fejlődésnek indult, nemcsak a közgazdászok, hanem a matematikusok körében is. Új numerikus módszerek jelentek meg (szimplex módszer, belső pontok módszere, stb.), és az elméleti kutatások is jelentősen megszaporodtak.

A matematikus, ha egy új tételt meg akar érteni, nem elégszik meg a bizonyítás megértésével. Ilyenkor rendszerint három utat követ. Először a tétel értelmét sajátos esetekben vizsgálja, ezután más bizonyításokat keres, majd próbálja a tételt általánosítani, abból az elvből kiindulva, hogy minden javítható (és ha kell, javítandó), amit ember teremtett. A minimax tétel általánosításainak hosszú és érdekes története van, amiről, például [43]-ben olvashatunk. A minimax tételek elméleti fontossága abból is látszik, hogy a konvex analízis nagy része ilyen tételeken alapul (lásd [42]).

Amint említettem, a [31] dolgozatban szereplő minimax tételben a stratégiafüggvény szimplexek szorzatán értelmezett kvázikonvex-kvázikonkáv, folytonos függvény. Az általánosítások ezeken a feltételeken lazítanak. Az egyik fontos általánosítás a [8] dolgozatban szerepel, amelyben a stratégiafüggvény lokálisan konvex terek konvex részhalmazainak szorzatán értelmezett folytonos kvázikonkáv-kvázikonkáv függvény. Egy évvel később, Ky Fan a [9] dolgozatban a kvázikonkáv-kvázikonvex tulajdonságot egy általánosabb konvexitási feltétellel helyettesítette. Ezt H. König [19] tovább általánosította a „König-konvex függvény" fogalomának felhasználásával. Ezeket a fogalmakat a következőképpen értelmezzük: Legyen A tetszőleges, nemüres halmaz. Az $f : A \to R$ függvény Ky Fan-konvex, ha minden $a_1, a_2 \in A$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén létezik olyan $a_3 \in A$, hogy $f(a_3) \leq (1 - \lambda)f(a_1) + \lambda f(a_2)$. Ha ez a feltétel csak $\lambda = 1/2$ esetén kell teljesüljön, akkor f König-konvex. Az előbbi fogalomból nyilván következik az utóbbi, de fordítva nem igaz. Viszont, ha A szekvenciálisan kompakt topológikus tér és f alulról félig folytonos, akkor a két fogalom megegyezik (lásd [∗23]). Ky Fan [10] bizonyított először minimax tételeket több stratégia-függvény esetén.

Ugyanakkor, az egyensúlyelméletben megjelentek olyan tételek is, amelyekben a „konvex halmaz" szerepét a topológiából ismert „összefüggő halmaz" fogalma veszi át. Wu [51] rámutatott, hogy olyan minimax tétel is bizonyítható, amelyben a szakaszok szerepét bizonyos Jordan-görbék játsszák. Néhány évvel később Joó István [16] a nívóhalmazok módszerével ilyen típusú, egyszerű és elegáns bizonyítást adott Neumann János tételére. Ennek hatására Stachó László [26] és Komornik Vilmos [25] olyan minimax tételeket bizonyított, amelyekben a stratégiafüggvény ún. intervallum tereken értelmezett. Ezek topologikus terek, amelyeken az algebrai műveleteket az „összefüggés" tulajdonsága helyettesíti (lásd [21], [22], [27], [47], [48]). Kassay Gábor [∗48] dolgozatában minimax feladatok esetén a [∗26]-ban tárgyalt egyensúlyelvet kiterjeszti intervallumterekre. Ezt felhasználva és Joó István [15]-ban közölt minimax tételét általánosítva, rámutat arra, hogy a konvex analízisben ismert dualitási tételek topológiai természetűek. Ugyancsak a [∗26] dolgozat eredményeit általánosítják mértéktereken értelmezett minimax feladatok esetén az [∗50] dolgozatban.

A Neumann János tételének előbbi általánosításai mellett fontosnak tartom megemlíteni a következő eredményeket:

– H. Weyl bilineáris stratégiafüggvény esetén a minimax-tételt a Farkas Gyula alternatíva tételével ekvivalens, végesen generált kúpokra vonatkozó saját tételével bizonyította [50];

– C. Berge a nemlineáris alternatívatételt véges számú, zárt konvex halmaz metszetére vonatkozó saját tételével bizonyította [1];

– M. Sion nemlineáris minimax tétel bizonyításában először alkalmazta a KKM lemmát olyan kétváltozós stratégiafüggvények esetén, amelyekre az első változó szerinti felső, illetve a második változó szerinti alsó nívóhalmazok zárt konvex halmazok [39];

– J. Kindler a minimax tételek és a halmazértékű függvényekre vonatkozó metszettételek közötti kapcsolatra mutatott rá ([19]- [23]);

– S. Simons bizonyította, hogy végtelen dimenziós terek esetén a minimax-tételek és a gyenge kompaktság között szoros kapcsolat van [40]-[45].

3. Egyensúlyfeladatok megoldásainak létezése és közelítő kiszámítása

Ky Fan [11] lokálisan konvex tereken értelmezett stratégiafüggvényekre bizonyított *minimax egyenlőtlenségek* megoldhatóságára vonatkozó tételeket. Ezek ekvivalensek Tikhonov fixponttételével, és alkalmazhatók a Nash-féle egyensúlyfeladatokra is, ezért az ilyen típusú minimax feladatokat ma egyensúlyfeladatoknak nevezzük. Az utóbbi dolgozatban bizonyított tétel volt az egyensúlyfeladatokra vonatkozó első általános érvényű létezési tétel. Az „egyensúlyfeladat” elnevezés először W. Oettli és munkatársai által közölt [2, 29, 30] dolgozatokban fordul elő.

A minimax egyenlőtlenség tétele [11] szerint a következő: Legyen X Hausdorff topologikus vektortér, K legyen X-nek nemüres kompakt, konvex részhalmaza, és a $f : K \times K \to \mathbb{R}$ függvény teljesítse a következő feltételeket:

(a) $f(x, x) \geq 0$,

(b) minden rögzített $x \in K$ esetén $f(x, .)$ kvázikonvex,

(c) minden rögzített $y \in K$ esetén $f(., y)$ felülről félig folytonos.

Ekkor létezik olyan $x^* \in K$, amelyre $f(x^*, y) \geq 0$, bármely $y \in K$ esetén.

Mivel differenciál operátorokkal értelmezett variációs egyenlőtlenségek esetén a (c) feltétel nem teljesül, H. Brézis, L. Nirenberg és G. Stampacchia [5] az előbbi tételt úgy általánosítja, hogy az legyen alkalmazható azokra is.

Az egyensúlyelmélet ma a nemlineáris analízis egyik legjelentősebb ága, gyakorlati és elméleti szempontból egyaránt. Magába foglalja, többek között, az optimalizálási, a minimax, a Nash-egyensúly, a komplementaritási, a fixpont feladatokat, a variációs egyenlőtlenségeket. Ezeknek a feladatoknak egységes matematikai modellje a következőképpen fogalmazható meg. Legyen A és B két nemüres halmaz és $f : A \times B \to \mathbb{R}$ adott függvény. Az $\bar{x} \in A$ elemet egyensúlypontnak nevezzük, ha

$$\text{(EF)} \qquad f(\bar{x}, y) \geq 0, \ \ \forall y \in B.$$

Az (EF) Minty típusú duálisa a következő: létezik-e $\bar{y} \in B$, amelyre

$$\text{(DF)} \qquad f(x, \bar{y}) \leq 0, \ \ \forall x \in A?$$

Amint Komlósi Sándor [24] igazolta, előfordulhat, hogy ugyanolyan feltételek mellett (EF)-nek van megoldása, de (DF)-nek nincs. Ha viszont $A = B$ és az f monoton, azaz

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0, \ \forall x, y \in A,$$

továbbá f minden szakaszon felülről félig folytonos a második változóra nézve, akkor a két probléma egyenértékű.

Az egyensúlyelmélet tárgya az egyensúlypontok létezésének és tulajdonságainak vizsgálata, valamint azok (közelítő) kiszámítása. Az elméleti kérdések tisztázása mellett, a gadasági, a mechanikai, az elektrodinamikai és a mérnöki tudományok területén talált fontos alkalmazások szintén serkentik az egyensúlypontok tanulmányozását. Nem csoda tehát, hogy az utóbbi években az egyensúlyelmélet iránti érdeklődés megsokszorozódott. A matematika különböző fejezeteiben megjelenő egyensúly-feladatok közül példaként megemlítek néhányat.

1) *Minimalizálás*

Legyen X nemüres halmaz és $h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adott függvény. A kérdés az, hogy milyen feltételek mellett igaz a következő állítás:

$$\exists \bar{x} \in X,\ h(\bar{x}) \leq h(y), \forall y \in X.$$

Ha $K := \{x \in X : h(x) < +\infty\}$ és $f : K \times K \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := h(y) - h(x)$ minden x, $y \in K$ esetén, $\bar{x}$ akkor és csak akkor megoldása a minimalizálási feladatnak, ha $\bar{x}$ megoldása az (EF) egyensúly-feladatnak.

2) *A fixpont feladat*

Legyen X valós Hilbert tér a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalár szorzattal, és K legyen a X kompakt részhalmaza. A $T : X \to 2^X$ halmazértékű függvényre vonatkozó fixpont feladat a következő állításra vonatkozik:

$$\text{(FPF)} \qquad \exists\ \bar{x} \in K,\ \bar{x} \in T(\bar{x}).$$

Értelmezve az $f : K \times K \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \max_{u \in T(x)} \langle x - u, y - x \rangle$; x, $y \in K$ függvényt, $\bar{x}$ akkor és csak akkor megoldása az (FPF) fixpont feladatnak, ha $\bar{x}$ megoldása az (EF) egyensúly-feladatnak.

3) *A komplementaritási feladat*

Az X valós vektortér valamely K részhalmaza *kúp* , ha $tx \in K$ valahányszor $t \geq 0$ és $x \in K$. Legyen X topologikus vektortér, $K \subseteq X$ egy zárt konvex kúp, és legyen $K^* := \{x \in X^* : \langle x, y \rangle \geq 0$, ha $y \in K\}$ annak duális kúpja, ahol X^* a X duális tere és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualitási függvény. Adott $T : K \to X^*$ operátor esetén a komplementaritási feladat a következő:

$$\text{(KF)} \qquad \exists\ \bar{x} \in K,\ T(\bar{x}) \in K^*, \quad \langle T(\bar{x}), \bar{x} \rangle = 0.$$

Értelmezve az $f : K \times K \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \langle T(x), y - x \rangle$, ha x, $y \in K$ függvényt, az $\bar{x}$ akkor és csak akkor megoldása a (KF) komplementaritási feladatnak, ha $\bar{x}$ megoldása az (EF) egyensúly-feladatnak.

4) *Variációs egyenlőtlenségek*

Az előbbi jelöléseket használva, a variációszámítási feladat a következő:

$$\exists \bar{x} \in K, \langle T(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0, \ \forall y \in K$$

Könnyen belátható, hogy ez a feladat a komplementaritási feladat általánosítása.

5) *A nyeregpont (minimax) feladat*

Legyen X, Y két nemüres halmaz és $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ adott függvény. A $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ elempár *nyeregpontja* h-nak az $X \times Y$ halmazon, ha

$$h(x, \bar{y}) \leq h(\bar{x}, \bar{y}) \leq h(\bar{x}, y), \ \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Legyen $A = B = X \times Y$ és $f : A \times B \to \mathbb{R}$,

$$f(a, b) := h(x, v) - h(u, y), \quad a = (x, y), b = (u, v).$$

6) *Nash-féle egyensúlyfeladat nemkooperatív játékok esetén*

A nemüres X_i, $i = 1, 2, ..., n$, halmazokkal értelmezzük az $X := X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ halmazt és a $h_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, függvényeket. Az $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \in X$ vektort a $h_1, h_2, ..., h_n$ függvények által meghatározott *Nash-egyensúlypontnak* nevezzük, ha minden $i = 1, 2, ..., n$ esetén fennáll a

$$h_i(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, ..., \bar{x}_n) \geq h_i(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, ..., \bar{x}_n), \quad \forall x_i \in X_i$$

egyenlőtlenség.

Az $f : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény értékét az $x = (x_1, ..., x_n)$ és $y = (y_1, ..., y_n)$ által meghatározott pontban az

$$f(x, y) := \sum_{i=1}^{n} [h_i(x_1, ...x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) - h_i(x_1, ...x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)]$$

egyenlőséggel értelmezzük. Könnyen belátható, hogy $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ akkor és csak akkor egyensúlypontja f-nek, ha a $h_1, ..., h_n$ függvények által meghatározott Nash-egyensúlypont.

A konvex függvény fogalmának Ky Fan és König-féle általánosításai bizonyos algebrai relációk segítségével történnek. Kassay Gábor művei közül néhány ilyen típusú feltételeket tartalmaz. Például, a [∗26] dolgozatban az előbbieknél általánosabb algebrai feltétel szerepel. Ennek a dolgozatnak tulajdonképpeni tárgya az egyensúlyfeladattal kapcsolatos „supinf-feladat". Ez a feladat a következő: adott $f : A \times B \to \mathbb{R}$ függvény esetén milyen feltételek mellett teljesül a

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) \geq 0 \tag{1}$$

egyenlőtlenség? Ha ez az egyenlőtlenség teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f teljesíti az supinf-feltételt. Minimax feladatok esetén a supinf-feltétel a

$$\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} f(x,y)=\inf_{y\in B}\sup_{x\in A} f(x,y)$$

következő egyenlőséget jelenti.

A fenti kérdésre adott válasz a konkáv függvény fogalmának következő általánosításán alapul: Az $f:A\times B\to\mathbb{R}$ függvény konkáv-szerű az A halmazon, ha létezik a $[0,1]$ intervallumnak olyan T sűrű részhalmaza, amelyre

$$\sup_{x\in A}\min_{1\le j\le m} f(x,y_j)\ge \min_{1\le j\le m}\sum_{i=1}^{n} s_i f(x_i,y_j), \tag{2}$$

minden $s_1,\dots,s_n\in T$, $\sum_{i=1}^n s_i=1$, $x_1,\dots,x_n\in A$, $y_1,\dots,y_m\in B$ esetén. Az f függvény konvex-szerű a B halmazon, ha $-f$ konkáv-szerű a második változóra nézve. (Az eredeti értelmezésben $T=[0,1]$.)

Hasonló fogalmak – bizonyos sajátos esetekben – szerepeltek korábban is a [3], illetve [46] dolgozatokban.

A Hahn-Banach tétel véges dimenziós változatával igazolható, hogy ha $B=\{y_1,\dots,y_m\}$ és az f konkáv-szerű, akkor (1) egyenértékű azzal, hogy

$$\sup_{x\in A}\sum_{j=1}^{m} t_j f(x,y_j)\ge 0,\ \forall\, t_1,\dots,t_m\in T,\ \sum_{j=1}^{m} t_j=1. \tag{3}$$

A következő tételben szerepelnek az alábbi tulajdonságok. Az f teljesíti a gyenge zártsági feltételt, ha a $\sup_{x\in A}\inf_{y\in F} f(x,y)\ge 0$, minden $F\subseteq B$ véges részhalmaz esetén, maga után vonja az (1) egyenlőtlenséget. Az f teljesíti az erős zártsági feltételt, ha minden $F\subseteq B$ véges részhalmaz esetén a $\sup_{x\in A}\inf_{y\in F} f(x,y)\ge 0$ maga után vonja azt, hogy létezik $x\in A$, amelyre $f(x,y)\ge 0$ minden $y\in B$ esetén.

A [∗26] dolgozat főtétele szerint ha f az A halmazon konkáv-szerű és teljesül a gyenge zártsági feltétel, akkor (1) egyenértékű azzal, hogy (3) igaz minden $\{y_1,\dots,y_m\}\subset B$ esetén. Továbbá, ha az erős zártsági feltétel is teljesül, akkor az egyensúly feladat megoldhatósága az jelenti, hogy (3) teljesül minden $\{y_1,\dots,y_m\}\subset B$ esetén.

Könnyen belátható, hogy ha $B\subset A$ konvex halmaz, f konvex a B-n, és $f(y,y)\ge 0$ minden $y\in B$ esetén, akkor (3) teljesül minden $\{y_1,\dots,y_m\}\subset B$ esetén.

Továbbá, abban az esetben amikor az A kompakt topologikus tér és f felülről félig folytonos az A-n, akkor teljesül az erős zártsági feltétel. A fenti tétel második része úgy tekinthető mint a Weierstrass tétel általánosítása. Valójában az említett tétel egy skalarizációs elvet fejezi ki.

A [∗26] dolgozat, többek között, a következő okok miatt is figyelemre méltó:

1) A benne értelmezett konvexítási fogalom általánosabb, mint a König-konvexitás, és a topológiai feltételek is kevésbé megszorítóak, mint például a [9], [26] és más – algebrai egyensúly feltételeket tartalmazó – dolgozatokban. Fontos, hogy [∗26]-ban a stratégiafüggvény értelmezési tartománya nem rendelkezik sem topológiai sem algebrai struktúrával.

2) A [∗26]-ban vizsgált supinf-egyenlőtlenség az egyensúlypont létezésének olyan szükséges feltételét fejezi ki, amely elégséges is, ha a minimum létezésére vonatkozó Weierstrass-tétel alkalmazható, például, ha A kompakt és f az első változóra nézve felülről féligfolytonos. (A természet mindig egyensúlyra törekszik, de nem mindig éri azt el.)

3) A [∗26] tételeiből könnyen levezethetők az operációkutatás alaptételei (Gordan-tétel, Farkas-tétel, Neumann János minimax tétele, Fritz John tétele, Karush–Kuhn–Tucker-tétel, stb.) (lásd [∗40]).

4) Ezek a tételek alkalmazhatók végtelen programozási és vektoregyensúly feladatokra is (lásd [12],[13],[28],[∗92]).

5) A használt matematikai apparátus egyszerű, mindössze a Hahn–Banach-tétel véges dimenziós változatára van szükség.

6) Ha $B \subseteq A$ és f mint kétváltozós függvény monoton, akkor [∗26] tételeiből rögtön következik az egyensúlyelméletben ismert dualitási tétel.

7) A lineáris és/vagy topológiai struktúrával nem rendelkező absztrakt konvexitási tereken értelmezett egyensúlyfeladatok tárgyalásának ez az egyik legegyszerűbb modellje (lásd [14]-[23], [∗20], [∗22]-[∗25], [∗29], [∗31], [∗32], [∗41], [∗42], [∗48], [∗55], [∗58], [∗61], [∗62], [∗66], [∗70]).

8) A [∗26] dolgozat alapötlete nagyon egyszerű. Ha a minimax feladatot diszkretizáljuk, akkor egy Borel-típusú mátrixjátékhoz jutunk. Ennek randomizált alakja szimplexek szorzatán értelmezett bilineáris stratégiafüggvénnyel van megadva, ezért Neumann János tétele szerint létezik legalább egy megoldása. Ha a diszkretizálást tetszőlegesen változtatjuk, akkor az így megszerkesztett megoldások halmazának segítségével a stratégiafüggvényre vonatkozóan megfogalmazható egy egyszerű feltétel (a supinf-konkavitás), amely egy zártsági feltétellel együtt garantálja a supinf-feladat megoldhatóságát.

9) A [∗26] dolgozat pedagógiai szempontból is érdekes, mert a használt matematikai apparátus viszonylag egyszerű és az eredmények hatósugara nagy. Ezek könnyen kiterjeszthetők, például, vektor- vagy halmazértékű függvényekkel értelmezett egyensúlyfeladatokra is (lásd [∗92] és [∗93]).

Az egyensúly-elmélet fontos része az egyensúlypontok közelítő kiszámítására vonatkozik. A gyakorlatban egy ilyen feladat általában nem egyszerű. Ennek okai közül csak hármat említek: Lehet, hogy a felhasznált módszerek jobb analitikai feltételeket követelnek, mint amivel az egyensúly-feladat adatai rendelkeznek. Még összetettebb a feladat, ha az adatai csak közelítőleg ismertek. Az is előfordul, hogy a feladat rosszul fogalmazott (ill-posed). Ilyenkor a mentőöv az lehet, ha a feladatot „regularizáljuk”, vagyis olyan feladat-sorozattal helyettesítjük, amelynél az említett nehézségek eltűnnek, és a megfelelő megoldások konvergálnak az eredeti feladat megoldásához, ha az létezik. Több ilyen regularizációs módszert ismerünk. Ezek közül legismertebbek a Tikhonov-féle, a Bregman-féle és a projekciós módszerek. Ezeknél a regularizáló függvények

$$f_k(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{k}\theta(x, y)$$

alakúak, ahol θ megfelelő tulajdonságokkal rendelkező függvény (lásd például [∗92], 11.5 Tétel). Kassay Gábor közelítő módszerekkel kapcsolatos eredményei közül fontosak valós- vagy halmazértékű függvényekre vonatkozó alábbi eredményei.

A [∗71] dolgozatban a Bregman-féle iteratív regularizációs módszerrel létezési és egyértelműségi tételeket bizonyítanak egyensúlyfeladatokra, reflexív Banach-terek zárt konvex részhalmazain értelmezett függvények esetén. Bizonyítják, hogy a megszerkesztett iteratív sorozat tagjaiból képzett halmaz minden gyenge torlódási pontja megoldása az adott egyensúly-feladatnak.

A [∗84] dolgozatban valós Hilbert-tereken értelmezett Brézis- pszeudomonoton kétváltozós függvényekkel megfogalmazott egyensúly feladatok megoldására egy új Popov-típusú iteratív módszer gyenge és erős konvergenciáját tanulmányozzák.

4. Halmazértékű függvényekkel értelmezett egyensúly-feladatok

Az 1980-ban megvédett *Rockafellar algoritmusa* című államvizsga-dolgozatában Kassay Gábor a következő feladatot tárgyalta.

Legyen H valós Hilbert tér. R.T. Rockafellar algoritmusa olyan eljárás, amellyel közelítőleg meghatározhatjuk valamely *maximálisan monoton* $T : H \to 2^H$ halmazértékű operátor zérushelyeit, vagyis azokat a $\bar{x} \in H$ pontokat, amelyekre $0 \in T(\bar{x})$.

Az algoritmus egy olyan $\{x_k\} \subset H$ sorozat megszerkesztéséből áll, ahol valamely $x_0 \in H$ pontból kiindulva az x_{k+1} pontot úgy értelmezzük mint a T_k operátor egyetlen zérushelye, ahol

$$T_k(x) = T(x) + \gamma_k(x - x_k)$$

itt $\{\gamma_k\}$ egy pozitív tagú korlátos valós számsorozat, amelynek tagjait regularizációs együtthatóknak nevezzük.

Rockafellar [37] bizonyította, hogy ha T maximálisan monoton és léteznek zérushelyei, akkor az $\{x_k\}$ sorozat gyengén konvergál a T valamelyik zérushelyéhez. Ha nincsenek zérushelyek, akkor a megszerkesztett sorozat nem korlátos.

1985-ben jelent meg Kassay Gábor első tudományos dolgozata [∗2], amelyben Rockafellar módszerét kiterjesztette reflexív Banach-terekre. Ebben a kérdéskörben később még néhány érdekes dolgozatot publikált társszerzőkkel.

A [∗46] dolgozatban reflexív Banach-tereken értelmezett, maximálisan monoton halmazértékű függvények Browder-típusú regularizálásával szerkesztett közelítő módszer stabilítását vizsgálták, ha az eredeti adatok szintén csak közelítőleg ismertek. Eredményeik magukba foglalják Rockafellar módszerének általánosítását arra az esetre, amikor az eredeti függvény Mosco-approximációval adott.

Az [∗53] dolgozatban a [∗2] eredményeit általánosítják reflexív Banach-téren értelmezett nem maximálisan monoton halmazértékű függvényekre. Rockafellar módszeréhez hasonló eljárással, a Bregman [4] távolságfüggvény felhasználásával olyan iteratív sorozatot szerkesztenek, amely gyengén konvergál egy megoldáshoz. Eredményeiket alkalmazzák rosszul fogalmazott (ill-posed) variációs egyenlőtlenségekre, továbbá olyan monoton (de nem maximálisan monoton) halmazértékű függvényekre, amelyek grafikonjai szekvenciálisan gyengén zártak, és olyan konvex optimalizálási feladatokra, amelyben az adatok csak közelítően vannak meghatározva.

A [∗64] dolgozatban az [∗53]-ben alkalmazott módszerrel erősen monoton, pszeudomonoton, illetve hemifolytonos többértékű függvényekkel értelmezett variációs egyenlőtlenség-rendszerek közelítő megoldására erősen konvergáló sorozatot szerkesztettek.

A [∗86] dolgozatban reflexív Banach-tereken többértékű Brézis pszeudomonoton operátorral értelmezett variációs egyenlőtlenség megoldhatóságára adnak feltételeket, általánosítva Tikhonov [49] és Browder [6] regularizációs módszerekkel kapott eredményeit.

Lgyen A és B két nemüres halmaz, Z topologikus valós vektortér, $C \subseteq Z$ egy konvex kúp, amelynek int$C$-vel jelölt belseje nem üres, és $f : A \times B \to Z$ adott függvény. Ebben az esetben az egyensúly-feladat kétféleképpen is megfogalmazható: Igazoljuk, hogy

(EVEF) $\exists \bar{a} \in A$ úgy, hogy $f(\bar{a}, b) \notin C \setminus 0$, $\forall b \in B$, vagy
(GVEF) $\exists \bar{a} \in A$ úgy, hogy $f(\bar{a}, b) \notin \mathrm{int}C \setminus 0$, $\forall b \in B$.

Az első esetben erős egyensúly-feladatról, a másodikban gyenge egyensúly-feladatról beszélünk. Ezek a feladatok általánosításai a gyakorlatban gyakran előforduló vektorfüggvények optimizálási és a vektor variációs egyenlőtlenségek megoldására vonatkozó feladatoknak.

Ehhez a témakörhöz tartoznak Kassay Gábor következő dolgozatai: [∗49], [∗56], [∗62], [∗64], [∗71], [∗75], [∗80], [∗84].

A halmazértékű operátorokkal értelmezett variációs egyenlőtlenségek sajátos esetei az előbbi feladatnak.

Legyen X az E valós Hausdoff lokálisan konvex tér nemüres részhalmaza és Y nemüres részhalmaza az E^* duális térnek. Továbbá, legyen C az Y nemüres részhalmaza, és legyen $F : C \to 2^X$ halmazértékű leképezés, nemüres értékekkel.

A Minty-féle variációs egyenlőtlenség problémája a következő:

$$\mathcal{M}(F;C): \inf_{x\in F(v)}\langle x, v-u\rangle \geq 0,\ \forall v\in C.$$

A Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenség problémája a következő:

$$\mathcal{S}(F;C): \sup_{x\in F(u)}\langle x, v-u\rangle \geq 0, \forall v\in C.$$

Legyenek $X_1,\dots X_n$, $Y_1,\dots,Y_n$ valós Hausdorff topologikus vektorterek, és $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ az $X_i\times Y_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ halmazokon értelmezett folytonos bilineáris függvények amelyek függhetnek i-től).

A Minty- és a Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenségek rendszerére vonatkozó problémájának megfogalmazása érdekében tételezzük fel, hogy $C_1\subset Y_1$, …, $C_n\subset Y_n$ nemüres halmazok és

$$F_i : C_1\times\cdots C_n \to 2^{X_i} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

halmazértékű függvények nemüres értékekkel. A Minty-féle variációs egyenlőtlenség problémája az $F_1,\dots,F_n$ halmazértékű függvények rendszerére a következő:

$$\mathcal{M}(F_1,\dots,F_n;C_1,\dots,C_n):$$
$$\begin{cases} \exists\ (u_1,\dots,u_n)\in C_1\times\cdots\times C_n:\ \forall i=1,\dots,n,\\ \forall v\in C_i\ \forall x\in F_i(u_1,\dots,u_{i-1},v,u_{i+1}\dots,u_n),\ \langle x,u_i-v\rangle_i\geq 0.\end{cases}$$

A Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenség problémája ugyanazon feltételek mellett a következő:

$$\mathcal{S}(F_1,\dots,F_n;C_1,\dots,C_n):$$
$$\begin{cases} \exists\ (u_1,\dots,u_n)\in C_1\times\cdots\times C_n:\ \forall i=1,\dots,n,\\ \forall v\in C_i\ \exists x\in F_i(u_1,\dots,u_i\dots,u_n),\ \langle x,v-u_i\rangle_i\geq 0.\end{cases}$$

Fontos gyakorlati helyzetek motiválják a variációs egyenlőtlenségi rendszerek tanulmányozását. Például az folyadékok áramlása repedezett porózus közegen keresztül és a plaszticitás modelljei variációs problémákhoz vezetnek (lásd [38]).

Az ilyen rendszerek fontosságát a Nash-egyensúlyelmélet is igazolja. [∗30]-ban a szerzők kimutatták, hogy abban az esetben, ha a F_i halmazértékű függvények Clarke szubdifferenciál típusúak, akkor az $\mathcal{S}(F_1,\dots,F_n;C_1,\dots,C_n)$ problémának van megoldása megfelelő feltételek mellett. Az idézett eredményből az következik, hogy ha az i-edik potenciál típusú operátor monoton az i-edik változóra nézve, akkor az $\mathcal{S}(F_1,\dots,F_n;C_1,\dots,C_n)$ feladat minden megoldása Nash-féle egyensúlyi pont a potenciálrendszer számára.

A [∗28] dolgozatban a szerzők az optimalizálás elméletében ismert Fermat-elvet – a Clarke-derivált felhasználásával – kiterjesztették egyensúlyfeladatokra.

Normált tereken értelmezett lokálisan Lipschitz-függvények esetén [*30]-ban értelmezték a Clarke-féle iránymenti derivált erős és gyenge változatát, valamint az erős és gyenge stacionárius pont fogalmát. Minden erős staciunárius pont gyenge stacionárius pont is. Ezeket alkalmazva a Nash-féle egyensúlypontokra, konvexitási és kompaktsági feltételek nélkül igazolták, hogy minden egyensúlypont erős stacionárius pont. Ha a feladat megfogalmazásában szereplő X_i halmazok kompakt konvex halmazok, akkor a Nash feladat tág osztályára léteznek gyenge stacionárius pontok. Ily módon a Nash-egyensúlyontra egy használható szükséges feltételt kapunk. Ez a feltétel egy halmazértékű operátorokkal adott $\mathcal{S}(F_1, \ldots, F_n; C_1, \ldots, C_n)$ típusú variációs egyenlőtlenség-rendszerrel értelmezett. Ha ebben a feladatban az F_i potenciál típusú operátor monoton az i-edik változóra nézve, minden i esetén, akkor ennek a feladatnak minden megoldása Nash-egyensúlypont a potenciálokkal értelmezett függvényrendszerre nézve.

A [∗39] dolgozatban elégséges feltételeket adnak a Minty és a Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenség-rendszerek megoldására. Bebizonyították, hogy ha az egyenlőtlenségek külön-külön megoldhatók, és az $F_1, \ldots, .F_n$ függvények alulról féligfolytonosak, akkor a rendszernek is van megoldása, vagyis a faktorizációs elv érvényes.

Kassay Gábor tudományos tevékenységét a [∗92] monográfiával koronázta meg. Ez a könyv az egyensúlyelmélet legújabb eredményeit - köztük a sajátjainak egy részét - foglalja össze egységes vezérfonal szerint.

Kassay Gábor pályafutása alatt tevékenységét rendkivül tudatosan szervezte meg. Például, mindenkivel kereste a kapcsolatot, akik az őt érdeklő problémák kutatásában fontos eredményeket értek el. Ebben segítették egyéni tulajdonságai is: nyított természetű volt, mindig kereste a tanulás lehetőségét a kapcsolataiban, a fellépése kellemes benyomást keltett, hamar megértette mások mondanivalóit, tisztán tudta kifejezni magát és szeretett másokkal együtt dolgozni. Ezzel magyarázható, hogy kutatási területén a legjobb szakemberekkel dolgozott együtt és dolgozatainak többsége társszerzőkkel készült. Példák és ellenpéldák szerkesztésében, valamint a dolgozat végleges formájának kidolgozásában sikerrel pályázhatott volna a nemzetközi nagymesteri címre. Amikor tanulmányi útjairól hazatért, a tanszéki Popoviciu-szemináriumon (amelynek az utóbbi években ő volt a vezetője) mindig beszámolt tapasztalatairól.

Barátai és kollegái lelkében nagy űrt hagyott maga után.

Hivatkozások

[1] C. Berge: *Sur une propriété combinatoire des ensembles convexes*, C.R. Acad. Sci. Paris, Vol. **248**, pp. 301–319 (1959).

[2] E. Blum and W. Oettli: *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student, Vol. **63**, pp. 123–145 (1994).

[3] A. Bogmér, M. Horváth and I. Joó: *Minimax tételek és konvexitás*, Matematikai Lapok, Budapest Vol. **34**, pp. 149–170 (1987).

[4] L.M. Bregman: *The relaxation method of finding the common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming,* USSR Comput. Math. Phys., Vol. **7** No. **3**, pp. 200–217 (1967). DOI: 10.1016/0041-5553(67)90040-7

[5] H. Brézis, L. Nirenberg and G. Stampacchia: *A Remark on Ky Fan's Minimax Principle,* Bullettino U.M.I., Vol. **4** No. **6**, pp. 293–300 (1972).

[6] F.E. Browder: *Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. **56** No. **4** pp. 1080–1086 (1966). DOI: 10.1073/pnas.56.4.1080

[7] S.S. Chang and Y. Zhang: *Generalized KKM theorem and variational inequalitie*, J. Math, Anal. Appl., Vol. **159**, pp. 208–223 (1991). DOI: 10.1016/0022-247X(91)90231-N

[8] K. Fan: *Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. **38**, pp. 121–126 (1952). DOI: 10.1073/pnas.38.2.121

[9] K. Fan: *Minimax theorems*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. **39**, pp. 42–37 (1953). DOI: 10.1073/pnas.39.1.42

[10] K. Fan: *Sur une théoreme minimax*, C.R. Acad. Sci. Paris, Vol. **259**, pp. 3925–3928 (1964).

[11] K. Fan: *A minimax inequality and its applications*, in O. Shisha (ed.), Inequalities III, Academic Press, pp. 103–113 (1972).

[12] M.R. Galán: *An intrinsic notion of convexity for minimax*, J. Convex Anal., Vol. **21**, pp. 1105–1139 (2014).

[13] M.R. Galán: *The Gordan theorem and its implication for minimax theory*, J. Nonlinear Convex Anal., Vol. **17**, pp. 2385–2405 (2016).

[14] I. Joó: *Note on my paper: A simple proof of von Neumann's minimax theorem*, Acta Math. Hung., Vol. **44** No. **3–4**, pp. 363–365 (1984). DOI: 10.1007/BF01950292

[15] I. Joó: *On some convexities*, Acta Math. Hung., Vol. **54** No. **1–2**, pp. 163–172 (1989). DOI: 10.1007/BF01950717

[16] I. Joó: *A simple proof of von Neumann's minimax theorems*, Acta Sci. Math., Vol. **42**, pp. 91–94 (1980).

[17] I. Joó and L.L. Stachó: *A note on Ky Fan's minimax theorem*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar., Vol. **39**, pp. 401–407 (1982). DOI: 10.1007/BF01896709

[18] I. Joó: *Minimax theorems not involving convexities of the function*, Publ., Math., Debrecen, Vol. **45**, pp. 395–396 (1994).

[19] J. Kindler: *On a minimax theorem of Terkelsen*, Arch. Math., Vol. **55**, pp. 573–583 (1990). DOI: 10.1007/BF01191693

[20] J. Kindler: *Intersection theorems and minimax theorems based on connectedness*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **178**, pp. 529–546 (1993). DOI: 10.1006/jmaa.1993.1323

[21] J. Kindler and R. Trost: *Minimax theorems for interval spaces*, Acta. Math. Hung., Vol. **54**, pp. 39–49 (1989). DOI: 10.1007/BF01950707

[22] J. Kindler: *Intersection theorems, minimax theorems, and abstract connectedness*, in: Minimax Theory and App;ications (Ed.: B. Riccieri and S. Simons), Kluwer, (1998). DOI: 10.1007/978-94-015-9113-3_9

[23] J. Kindler: *Intersecting sets in midset spaces*, Arch. Math., Vol. **62**, pp. 168–176 (1994). DOI: 10.1007/BF01198671

[24] S. Komlósi: *On the Stampacchia and Minty variational inequalities*, in: G. Giorgi and F.A. Rossi (Eds.) Generalized Convexity and Optimization for Economic and Financial Decisions, Pitagora Editrice, Bologna, 1999.

[25] V. Komornik: *Minimax theorems for upper semicontinuous functions*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., Vol. **40**, pp. 159–163 (1982). DOI: 10.1007/BF01897316

[26] H. König: *Über das von Neumannsche Minimax-Theorem*, Arch. Math., Vol. **19**, pp. 482–487 (1968). DOI: 10.1007/BF01898769

[27] H. König: *A general minimax theorem based on connectedness*, Arch. Math., Vol. **59**, pp. 55–64 (1992). DOI: 10.1007/BF01199015

[28] P.M. Lopez and M.R. Galán: *Infinite programming and theorems of the alternative*, Math. Meth. Appl. Sci., pp. 1–10 (2019).

[29] L.D. Muu and W. Oettli: *Convergence of an adoptive penalty scheme for finding constrained equilibria*, Nonlinear Anal., Vol. **18**, pp. 1159–1166 (1992). DOI: 10.1016/0362-546X(92)90159-C

[30] M.A. Noor and W. Oettli: *On general nonlinear complementarity problems and quasi-equilibria*, Le Matematiche (Catania) Vol. **49**, pp. 313–331 (1994).

[31] J. von Neumann: *Zur Theorie der Gesellschaftspiele*, Math. Annalen., Vol. **100**, pp. 295–320 (1928) DOI: 10.1007/BF01448847

[32] J. von Neumann: *Sur la théorie des jeux*, C.R. Acad. Sci. Paris, Vol. **186** No. **25**, pp. 1689–1691 (1928).

[33] J. von Neumann and O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.

[34] J. von Neumann: *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes*, Ergebn. Math. Kolloq. Wien, Vol. **8**, pp. 73–83 (1937).

[35] J. von Neumann: *On the theory of games of strategy*, in A.W. Tucker, R.D. Luce (eds.) Contribution to the theory of games, Princeton Univ. Press, Vol. **4**, pp. 13–42 (1959). DOI: 10.1515/9781400882168-003

[36] *S. Park* and H. Kim: *Generalized KKM mapson generalized convex spaces*, Nonlinear Analysis Forum, Vol. **5**, pp. 15–35 (2000).

[37] R.T. Rockafellar: *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim., Vol. **14** No **5**, pp. 877–898 (1976). DOI: 10.1137/0314056

[38] R.E. Showalter: *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Vol. **49** (1996).

[39] M. Sion: *On General Minimax Theorems*, Pacific J. Math., Vol. **8**, pp. 171–176 (1958). DOI: 10.2140/pjm.1958.8.171

[40] S. Simons: *Criteres de faible compacité en termkes du theoreme de minimax,* Seminaire Choquet, Vol. **23**, p. 8 (1970/1971).

[41] S. Simons: *Maximinimax, minimax, and antiminimax theorems and a result of R.C. James*, Pac. J. Math., Vol. **40** No **3**., pp. 709–718 (1972). DOI: 10.2140/pjm.1972.40.709

[42] S. Simons: *Minimax and monotonicity*, Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, Vol. **1693** (1998). DOI: 10.1007/BFb0093633

[43] S. Simons: *Minimax theorems and their proofs*, Ding-Zhu Du and Panos M. Pardalos (ed.): Minimax and applications, Kluwer Acad. Publ., pp. 1–23 (1995). DOI: 10.1007/978-1-4613-3557-3_1

[44] S. Simons: *A flexible minimax theorem*, Acta Math. Hungar., Vol. **63**, pp. 119–132 (1994). DOI: 10.1007/BF01874944

[45] S. Simons: *Addendum to "A flexible minimax theorem"*, Acta Mathematica Hungarica, Vol. **69**, pp. 359–360 (1995). DOI: 10.1007/BF01874582

[46] Z. Sebestyén: *An elementary minimax theorem,* Acta Sci. Math., Szeged, Vol. **47**, pp. 457–459 (1984).

[47] L.L. Stachó: *Minimax theorems beyond topological vector spaces*, Acta Sci.Math., Szeged, Vol. **42**, pp. 157–164 (1980).

[48] L.L. Stachó: *A note on König's minimax theorem*, Acta Math. Hung., Vol. **64** No. **2**, pp. 183–190 (1994). DOI: 10.1007/BF01874121

[49] A.N. Tikhonov: *Regularization of incorretly posed problems,* Soviet. Math. Dokl., Vol. **4**, pp. 1035–1038 (1963).

[50] H. Weyl: *Elementary Proof of a Minimax Theorem Due to von Neumann*, in H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds), *Contributions to the Theory of Games 1*, Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, Vol. **20**, pp. 19–25 (1950).

[51] Wu, Wen–tsün: *A remark on the fundamental theorem in the theory of games*, Sci. Rec., New. Ser., Vol. **3**, pp. 229–233 (1959).

Kolumbán József 1935-ben született, 1957-ben a kolozsvári Bolyai Tudományegyetem matematika-fizika szakán tanári oklevelet, majd 1958-ban a kolozsvári Victor Babeş Tudományegyetemen kutató matematikusi oklevelet szerzett. Egyetemi pályáját a Bolyai Tudományegyetemen kezdte 1959-ben, majd folytatta az egyesített Babeş–Bolyain, ahol jelenleg emeritus professzor. 1968-as doktori disszertációjában a többszempontú szélsőérték-feladatok dualitáselméletével foglalkozott.

Pályafutásának elején approximációelmélettel, majd pedig egyensúlyelmélettel foglalkozott. 1971-ben elnyerte a Humboldt Alapítvány kutatói ösztöndíját. A romániai rendszerváltás után újraalakult Erdélyi Múzeum-Egyesület választmányának tagja lett. Ő kezdeményezte a Matematika és Informatika osztály megalakítását, amelynek 9 éven át elnöke volt. 15 évig volt az általános és középiskolai matematikai oktatást segítő kolozsvári Matlap főszerkesztője. 2011 és 2014 között a Kolozsvári Akadémiai Bizottság egyik alelnöke volt. 2001-től a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja. Közel 100 dolgozatot, két könyvet és hat egyetemi jegyzetet publikált. Balázs Mártonnal közösen 1978-ban megjelentette *Matematikai analízis* című könyvét a kolozsvári Dacia Könyvkiadónál. Ez a könyv az erdélyi magyar matematikai oktatás több generációját szolgálta.

KOLUMBÁN JÓZSEF
Babeş–Bolyai Tudományegyetem,
Matematika és Informatika Kar,
Kolozasvár, Kogălniceanu utca 1.
jokolumban@yahoo.com

THE SCIENTIFIC ACTIVITY OF PROF. GÁBOR KASSAY

József Kolumbán

The paper summarizes the scientific work of Gábor Kassay (1956–2021), professor of mathematics and university professor.